РОСЖЕЛДОР

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»

(ФГБОУ ВО РГУПС)

М.Д. Линденбаум, О.Г. Ведерникова

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ НА НАДЕЖНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Учебно-методическое пособие

Ростов-на-Дону
2017

УДК 681.3(07) + 06

Рецензент – доктор технических наук, профессор М.А. Бутакова

Линденбаум, М.Д.

Определительные испытания на надежность информационных систем: учебно-методическое пособие для лабораторных и практических занятий / М.Д. Линденбаум, О.Г. Ведерникова; ФГБОУ ВО РГУПС. – Ростов н/Д, 2017. – 41 с. – Библиогр.: с. 41.

Изложены методы организации и проведения определительных испытаний на надежность, методы статистического моделирования. Приведены задания и методика выполнения практических и лабораторных занятий по моделированию определительных испытаний, примеры выполнения работ.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Информатика и вычислительная техника» и «Информационные системы и технологии», а также для студентов всех специальностей, изучающих дисциплины «Надежность информационных систем» и «Надежность программно-аппаратных комплексов».

Одобрено к изданию кафедрой «Вычислительная техника и автоматизированные системы управления».

1 ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ НА НАДЁЖНОСТЬ

1.1 Общие положения

Целью определительных испытаний является нахождение статистических оценок числовых характеристик, параметров законов распределения времени безотказной работы и времени восстановления, и на их основе оценка требуемых показателей безотказности и ремонтопригодности информационных систем (ИС). В случаях, когда законы распределения неизвестны, то по полученной статистике определяют и вид законов. Испытания на надёжность могут организовываться специально или совмещаться с другими испытаниями элементов и систем.

В теории надёжности для оценки безотказности используется функция распределения времени безотказной работы или функция отказов $F(t)=Q(t)$, т.е. время от момента включения в работу до момента отказа t, и функция надёжности $P(t)=1–F(t)$. Используется также плотность вероятности $f(t)$, условная плотность вероятности $\lambda(t)$ при условии, что ранее отказа не было, называемая интенсивностью отказов $\lambda(t)= f(t)/P(t)$ и интеграл интенсивности отказов, который называют функцией выработанного ресурса за время t и обозначают $\Lambda(t)$

$$\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(x)dx.$$

Все перечисленные зависимости одинаково полно описывают надежность устройств, так как, зная любую из них, легко рассчитать все остальные по формулам, приведенным в табл. 1.1.

Для оценки ремонтопригодности проводят обычно так называемые ремонтные испытания. Они бывают двух типов: с возникающей и с создаваемой необходимостью технического обслуживания и восстановления. В первом случае ремонтные испытания обычно проводятся одновременно с испытаниями на безотказность. Для случая создаваемой необходимости восстановления организуются специальные испытания. В обоих случаях проводится хронометраж времени, затрачиваемого на ремонт или замену отказавших элементов, включая операции поиска неисправностей, определяется трудоёмкость ремонта с учётом квалификации персонала. Время, затрачиваемое на прибытие персонала, доставку запасных деталей и инструмента к месту отказа, обычно исследуется отдельно. Время восстановления сравнительно невелико, поэтому оценка показателей ремонтопригодности обычно производится по полным выборкам и не вызывает затруднений.

Таблица 1.1

Известная функция	Формулы для определения остальных функций				
	$F(t)$	$P(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$	$\Lambda(t)$
$F(t)$	—	$1-F(t)$	$\frac{dF(t)}{dt}$	$\frac{1}{1-F(t)}\frac{dF(t)}{dt}$	$\int_0^t \frac{dF(x)}{1-F(x)}$
$P(t)$	$1-P(t)$	—	$-\frac{dP(t)}{dt}$	$-\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt}$	$-\int_0^t \frac{dP(x)}{P(x)}$
$f(t)$	$\int_0^t f(x)dx$	$\int_t^\infty f(x)dx$	—	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(x)dx}$	$\int_0^t \frac{f(x)dx}{\int_x^\infty f(y)dy}$
$\lambda(t)$	$1-e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}$	$e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}$	$\lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(x)dx}$	—	$\int_0^t \lambda(x)dx$
$\Lambda(t)$	$1-e^{-\Lambda(t)}$	$e^{-\Lambda(t)}$	$\frac{d\Lambda(t)}{dt}e^{-\Lambda(t)}$	$\frac{d\Lambda(t)}{dt}$	—

Безотказность большинства элементов информационных систем весьма высока, наработка на отказ измеряется тысячами часов, и не всегда удаётся проводить испытания столь длительно, чтобы отказали все испытываемые устройства. Это приводит к определённой специфике, как при выборе планов испытаний, так и при статистической обработке их результатов. Для получения достаточно точных оценок показателей безотказности требуется, чтобы за время испытаний было зафиксировано хотя бы несколько десятков, лучше сотни отказов. Это в свою очередь требует затрат большого времени, большого числа изделий, делает испытания весьма дорогостоящими.

Определительные испытания на надёжность классифицируются следующим образом:

1 По постановке задачи.

1.1 Определяется закон распределения времени безотказной работы и его параметры. Это наиболее общая постановка задачи, так как, зная закон распределения и его параметры, можно легко найти любые показатели надёжности.

1.2 Оценка числовых характеристик закона распределения и показателей надёжности, таких, например, как наработка на отказ, вероятность безотказной работы за заданное время и др.

2 По наличию априорной информации.

2.1 Вид закона распределения известен, например, по результатам испытания или подконтрольной эксплуатации аналогов.

2.2 Вид закона распределения неизвестен.

3 По характеру получаемого в результате испытаний статистического материала.

3.1 План испытаний строится таким образом, что получаемая статистика точно соответствует оцениваемым показателям, например, требуется оценить вероятность безотказной работы за заданное время и изделия испытываются в течение этого времени, или требуется оценить наработку на отказ и все изделия испытываются до отказа.

3.2 План испытаний не позволяет непосредственно оценивать требуемые показатели безотказности. Это обычно имеет место в случае усеченных выборок. Тогда необходимо либо априорное знание закона распределения времени безотказной работы, либо определять его на основе полученных статистических данных и проверять выбранный закон по критериям согласия. Использование неверного закона может приводить к очень грубым ошибкам при оценке показателей надёжности.

1.2 Планы испытаний на надёжность

Как правило, нет возможности так организовать испытания, чтобы получить данные о надёжности в удобном для обработки виде и в достаточном объёме. Приходится оценивать показатели надёжности по тому статистическому материалу, какой смогли получить. На характер статистического материала существенное влияние оказывает стратегия организации испытаний, а именно следующие факторы:

- число изделий, подвергаемых испытаниям;
- порядок контроля работоспособности изделий;
- порядок восстановления (замены) изделий;
- порядок поступления изделий на испытания;
- условие окончания испытаний.

Множество возможных сочетаний этих факторов является причиной большого разнообразия стратегий испытаний. В соответствии с существующими стандартами в настоящее время приняты следующие условные обозначения факторов: N – число изделий; U – отсутствие замены или восстановления; R – замена отказавших изделий такими же новыми; M – восстановление отказавших изделий; T – испытания завершаются по истечению фиксированного отрезка времени (наработки); r – испытания оканчиваются по достижению фиксированного числа отказов (восстановлений). Обычно принято считать, что стратегии R и M идентичны, т.е. восстановление является полным. В сложных

ИС, как правило, это не так. При устранении отказа восстанавливается или заменяется новой лишь незначительная часть системы и процессы деградации (старения и износа), если они имеют место, продолжаются. Будем считать, что восстановление *(M)* не повышает надёжность системы в целом.

Каждый конкретный план испытаний в этих обозначениях записывается сочетанием соответствующих трёх символов, заключённых в скобки, например $[NUT]$, $[NMr]$ и т.д. При этом предполагается, что изделия испытываются одновременно и контроль осуществляется непрерывно. Эти условия не всегда удаётся выполнить. Если изделия поступают на испытания не одновременно или могут быть сняты с испытаний в произвольные моменты времени по каким-либо посторонним причинам, то стратегии считаются нестрогими и для них используются не квадратные, а круглые скобки. В случае периодического контроля работоспособности обозначения плана заключается в двойные скобки, квадратные или круглые. В предельном случае, если контроль производится только в конце испытаний, при этом восстановление естественно отсутствует, ставятся фигурные скобки $\{NUT\}$.

Несмотря на большое разнообразие планов испытаний, различных видов получаемого статистического материала значительно меньше, так как некоторые организационно разные стратегии дают выборки с одинаковой структурой, к которым применимы одни и те же методы статистической обработки. С точки зрения характера статистического материала при любых стратегиях испытаний получаются три типа реализаций случайных наработок:

1) наработки до отказов или между отказами (полные реализации);

2) безотказные наработки (усечённые или неполные реализации);

3) наработки между моментами контроля, при которых обнаружены отказы (условные реализации).

К ним применяются следующие обозначения:

1) ———× 2) ———● 3) ———┤

Если испытания завершаются в момент возникновения определённого по счёту отказа, то соответствующая наработка обозначается

———⊗ .

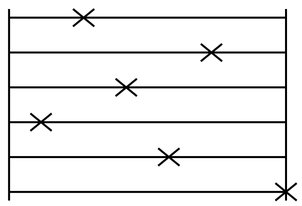
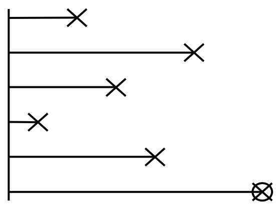
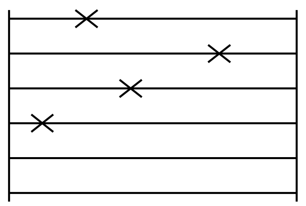
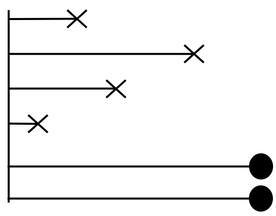
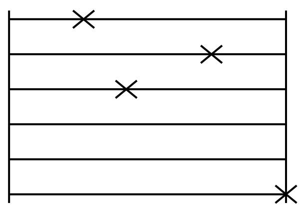
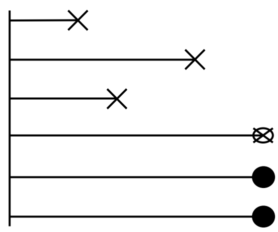
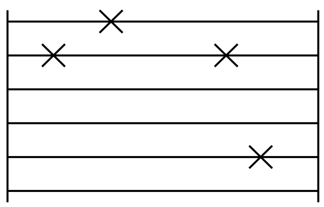
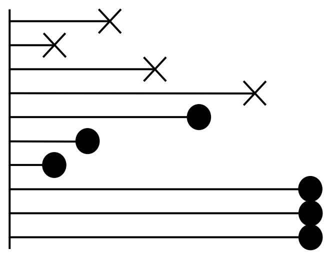
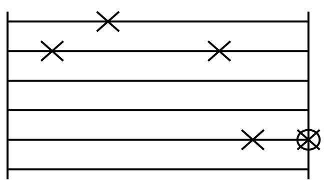
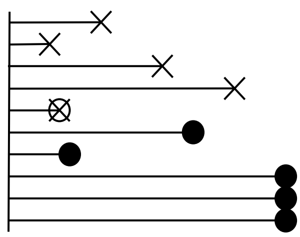
В принятых обозначениях каждому плану испытаний можно сопоставить диаграмму реализаций, наглядно представляющую специфику получаемых статистических данных. При этом возникает возможность выявить ряд типовых диаграмм, к которым сводятся результаты многих различных планов. В таблице 1.2 приведены типы диаграмм реализаций для планов с непрерывны контролем работоспособности. Планы с периодическим контролем работоспособности и планы типа M с неполным восстановлением здесь не рассматриваются, так как они более характерны для статистики, получаемой в результате подконтрольной эксплуатации.

Типы выборок при непрерывном контроле номеруются 1А, 1Б и т.д. При плане $[NUN]$ результаты испытаний содержат только полные наработки, причём момент последнего отказа является моментом окончания испытаний; это классический тип выборки (тип 1А). При плане $[NUT]$, если N_1 изделий за время T отказали, то результаты испытаний содержат N_1 полных наработок и $N_2=N–N_1$

одинаковых неполных наработок длительностью T (тип выборки 1Б, т.е. тип усечённой сверху выборки). Такой же тип выборки получается при плане испытаний $[NUr]$ (тип выборки 1В); эти выборки называют однократно усечёнными.

Таблица 1.2

Планы испытаний и диаграммы реализаций
(непрерывный контроль)

План испытаний	Схема процесса испытаний	Диаграмма реализаций	Тип выборки
$[NUN]$			1А
$[NUT]$			1Б
$[NUr]$			1В
$[NRT]$			1Г
$[NRr]$			1Д

Типы выборок при непрерывном контроле номеруются 1А, 1Б и т.д. При плане [NUN] результаты испытаний содержат только полные наработки, причём момент последнего отказа является моментом окончания испытаний; это классический тип выборки (тип 1А). При плане [NUT], если N_1 изделий за время T отказали, то результаты испытаний содержат N_1 полных наработок и $N_2=N–N_1$ одинаковых неполных наработок длительностью T (тип выборки 1Б, т.е. тип усечённой сверху выборки). Такой же тип выборки получается при плане испытаний [NUr] (тип выборки 1В); эти выборки называют однократно усечёнными

В остальных случаях (планы испытаний [NRT] и [NRr]) выборки типов 1Г, 1Д также содержат полные и неполные наработки и отличаются от выборок типа 1Б, 1В только тем, что в них усечённые сверху наработки имеют как одинаковые, так и разные длительности; это многократно усечённые выборки. С точки зрения планирования и организации испытаний планы типа T проще и удобней планов типа r, так как заранее известно время их окончания, но при этом, как правило, невозможно предсказать число полных реализаций, от чего существенно зависит точность получаемых оценок. При планах типа r, наоборот, точность оценок можно предсказать заранее, а время испытаний случайно. Возможны планы, когда испытания завершаются или по истечению фиксированного отрезка времени (наработки), или по достижению фиксированного числа отказов, в зависимости от того, какое из событий наступит раньше, например, план [$NR(T,r)$]. Однако эти планы не вносят ничего нового в типы выборок.

1.3 Точечное оценивание показателей надёжности при наличии априорной информации о виде закона распределения

Если закон распределения известен, то по числовым характеристикам можно рассчитать его параметры и, наоборот, по параметрам – числовые характеристики. В зависимости от характера статистики и используемого статистического метода оцениваются либо параметры, либо числовые характеристики. Объём опытных данных для оценки надёжности ИС всегда ограничен и часто весьма невелик, из-за чего статистические оценки числовых характеристик и параметров законов распределения являются случайными величинами и могут иметь большой разброс. Задача определения статистических оценок состоит в нахождении наилучших значений, возможно меньше отличающихся от неизвестных фактических величин. Оптимальные статистические оценки обладают свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности.

Статистическую оценку θ^* называют состоятельной, если она при безграничном увеличении числа наблюдений n сходится по вероятности к неизвестному значению параметра θ (здесь и всюду в дальнейшем статистические оценки величин будем помечать звёздочкой, чтобы они чётко отличались от неизвестных истинных значений) при $n\to\infty$ $P(|\theta^*–\theta|<\varepsilon)>1–\delta$,где ε, δ – сколь угодно малые величины.

При ограниченном объёме наблюдений оценка не должна иметь систематической ошибки – это свойство называют несмещённость, т.е. математическое ожидание оценки должно совпадать с неизвестным значением параметра

$$M(\theta^*)=\theta.$$

Эффективность оценки состоит в том, что дисперсия случайных отклонений от неизвестного значения параметра имеет минимально возможное значение

$$D(\theta^*)\rightarrow \min.$$

Оптимальные оценки принято называть *точечными*, так как они не показывают, насколько сильно фактические неизвестные значения параметров θ могут отличаться от найденных значений θ^*. Для ответа на вопрос о точности полученных значений и возможных отклонениях используют *интервальные оценки* или доверительные интервалы.

Статистические выборки случайных величин могут быть сгруппированными и не сгруппированными. При непрерывном контроле исправности получаются не сгруппированные данные; они представляют собой набор n реализаций случайной величины наработки до отказа или наработки между отказами: $t_1, t_2, \ldots , t_n$. Реализации могут быть представлены в естественном порядке их наблюдения в опытах. Для решения задач оценивания последовательность реализаций значения не имеет. В некоторых задачах, например для построения функции распределения случайной величины по статистическим данным их необходимо расположить в порядке возрастания: $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$. Упорядоченные по возрастанию данные называют вариационным рядом.

Когда требуется определять вероятности отказов на определённых отрезках времени, например для построения плотности распределения и интенсивности отказов, данные группируют. Весь диапазон изменений случайной величины разбивают на L интервалов и подсчитывают числа реализаций, попавших в каждый интервал $m_1, m_2, \ldots , m_L$.

Важно выбрать оптимальное число интервалов. Если интервалов слишком мало, то трудно уловить характер зависимости, если слишком много, интервалы короткие и в них попадает менее пяти реализаций, тогда получается слишком большой случайный разброс. Рекомендуется число интервалов рассчитывать по следующей эмпирической формуле, округляя результат до целого:

$$L = 1 + 2{,}2 \cdot ln(n). \qquad (1.1)$$

Интервалы h удобно принимать одинаковыми, их рассчитывают по формуле:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{L}. \qquad (1.2)$$

Далее рассчитываются границы интервалов $g_{j+1}=g_j+h$, $g_0=x_{min}$, $g_L=x_{max}$. Если в некоторые интервалы попадает менее пяти точек, то их принято объединять.

Как указывалось, при плане [NUN] результаты испытаний содержат только полные наработки; это классический тип выборки, для которой оптимальные оценки числовых характеристик находятся *методом моментов* независимо от закона распределения времени безотказной работы. В частности, математическое ожидание – это наработка на отказ T_0.

Среднее арифметическое значений не сгруппированной выборки является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой математического ожидания

$$m_t^* = T_0^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\ . \tag{1.3}$$

Дисперсия D_t представляет собой математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от её среднего значения, поэтому среднее арифметическое квадратов отклонений тоже является состоятельной несмещённой и асимптотически эффективной оценкой дисперсии; при замене неизвестного нам значение T_0 на его оценку T_0^* формула для оценки дисперсии имеет следующий вид

$$D_t^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(t_i - T_0^*)^2\ . \tag{4}$$

Оценки среднего квадратического отклонения σ_t и коэффициента вариации v_t рассчитываются по обычным формулам:

$$\sigma_t^* = \sqrt{D_t^*}\ , \qquad v_t^* = \frac{\sigma_t^*}{T_0^*}\ . \tag{1.5}$$

Если закон распределения известен, то по найденным оценкам числовых характеристик можно рассчитать параметры закона. Для описания времени безотказной работы ИС наиболее часто используется однопараметрический экспоненциальный закон распределения. Этот закон соответствует случаю, когда интенсивность отказов примерно постоянна. Функция распределения $F(t)$, функция надёжности $P(t)$, плотность распределения $f(t)$ и интенсивность отказов $\lambda(t)$ соответственно равны

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},\quad P(t) = e^{-\lambda t},\quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\quad \lambda(t) = \lambda, \tag{1.6}$$

где λ – параметр закона распределения.

Числовые характеристики

$$m_t = T_0 = 1/\lambda;\quad D_t = 1/\lambda^2;\ \sigma_t = 1/\lambda\ ;\quad v_t = 1.$$

Если наблюдается процесс приработки или процесс износа и старения, то наиболее часто используется двухпараметрический закон распределения Вейбулла

$$F(t) = 1 - e^{-(t/a)^b} = 1 - \mathrm{e}^{-(\alpha t)^b}\ ,\quad f(t) = \frac{b}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{b-1} e^{-(t/a)^b}, \tag{1.7}$$

где a – параметр масштаба по времени безотказной работы;

$\alpha = 1/a$ – параметр масштаба по интенсивности отказов;

b – параметр формы.

Числовые характеристики

$$m_t = a\gamma_1(b);$$
$$\sigma_t = a\gamma_2(b);$$
$$v_t = \gamma_3(b) = \gamma_2(b)/\gamma_1(b),$$

где $\gamma_1(b) = \Gamma(1 + 1/b)$; $\gamma_2(b) = \sqrt{\Gamma(1+2/b)-\gamma_1^2(b)}$; $\Gamma(z)=\int_0^\infty s^{z-1}e^{-s}ds$ – гамма-функция (для значений коэффициентов $\gamma_1(b)$, $\gamma_2(b)$, $\gamma_3(b)$ имеются таблицы).

В зависимости от величины коэффициента формы b этот закон изменяет свой характер. Так при b=1 закон Вейбулла обращается в экспоненциальный закон, описывающий внезапные отказы; при b>2 он хорошо описывает процессы износа и старения, у которых интенсивность отказов со временем возрастает; при b<1 – описывает процесс приработки, у которого интенсивность отказов убывает со временем.

Для экспоненциального закона распределения оценка единственного параметра находится по формуле $\lambda^*=1/T_0^*$.

В *законе распределения Вейбулла* для нахождения оценки параметра формы нужно решить трансцендентное уравнение $v_x^* = \gamma_3(b^*)$ относительно $b^*=\gamma_3^{-1}(v_x^*)$, Значения коэффициентов $\gamma_1(b^*)$ и $\gamma_3^{-1}(v_x^*)$ могут быть рассчитаны по приближённым формулам ($1\le b \le 4$):

$$b=\gamma_3^{-1}(v)=1+\frac{v-1}{0.0526-1.03\cdot v} \quad \text{(погрешность } \pm 0{,}56\%\text{);}$$

$$\gamma_1(b) = 1 - 0{,}51/b + 0{,}61/b^2 - 0{,}1/b^3 \quad \text{(погрешность } \pm 0{,}13\%\text{).}$$

Оценка параметра положения находится по формуле $a^* = m_x^*/\gamma_1(b^*)$.

1.4 Обработка статистических данных при усеченных выборках

При всех *остальных планах испытаний* кроме плана [*NUN*] обработка статистических данных начинается с *оценки параметров закона распределения*, и затем рассчитываются числовые характеристики и показатели надёжности. Поэтому априори необходимо либо знать, либо задаться видом закона распределения. Наиболее широко для описания безотказности аппаратуры ИС используется двухпараметрический *закон распределения Вейбулла*. Рассмотрим методы оценки параметров этого закона по усечённым выборкам.

Для однократно усечённой выборки (планы испытаний [*NUT*], [*NUr*]) строго применимы два метода оценивания параметров закона: *метод максимального правдоподобия и метод квантилей.*

1.4.1 Метод квантилей

Метод квантилей состоит в следующем: рассчитывается эмпирическая функция и путём приравнивания теоретических и статистических квантилей составляется столько уравнений, сколько параметров закона распределения необходимо определить. Метод квантилей по существу представляет собой интерполяцию статистических данных теоретическим распределением. Квантили желательно выбирать таким образом, чтобы соответствующие значения функции распределения делили интервал [0, 1] на примерно равные части. Метод квантилей существенно проще метода максимального правдоподобия, однако получаемые статистические оценки не обладают свойством эффективности. Для оценки параметров a^* и b^* закона распределения Вейбулла используются два уравнения

$$\begin{cases} 1 - exp(-(t_1 / a^*)^{b^*}) = F_1; \\ 1 - exp(-(t_2 / a^*)^{b^*} = F_2, \end{cases} \tag{1.8}$$

где t_1, t_2 – квантили эмпирической функции распределения;

F_1, F_2 – значения эмпирической функции распределения, соответствующие квантилям t_1 и t_2.

Если время испытаний T примерно равно или меньше наработки на отказ, то принимают $t_1 = T$, $t_2 = T/2$. Преобразуем систему уравнений (1.8) и произведём двукратное логарифмирование

$$\begin{cases} exp(-(t_1 / a^*)^{b^*}) = 1 - F_1; \\ exp(-(t_2 / a^*)^{b^*} = 1 - F_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(ln t_1 - ln a) = ln(-ln(1 - F_1)); \\ b(ln t_2 - ln a) = ln(-ln(1 - F_2)). \end{cases} \tag{1.9}$$

Решение системы уравнений (1.9) даёт статистические оценки для параметров a^* и b^*

$$b^* = \frac{ln(-ln(1 - F_1)) - ln(-ln(1 - F_2))}{ln(t_1 / t_2)}, \tag{1.10}$$

$$a^* = \frac{t_1}{(-ln(1 - F_1))^{1/b^*}}. \tag{1.11}$$

1.4.2 Метод максимального правдоподобия

Метод максимального правдоподобия (МП-метод) позволяет обрабатывать любые статистические данные при любых планах испытаний. Получаемые оценки обладают свойствами состоятельности, несмещённости, асимптотической эффективности и имеют асимптотически нормальный закон распределения. Универсальность МП-метода обусловлена тем, что статистическую задачу оптимального оценивания параметров он сводит к вероятностной задаче составления функции правдоподобия L, которая представляет собой совместное распределение результатов независимых наблюдений

$$L(\mathbf{x}/\boldsymbol{\theta}) = P(x_1/\boldsymbol{\theta})\, P(x_2/\boldsymbol{\theta}) \cdot \ldots \cdot P(x_n/\boldsymbol{\theta}), \tag{1.12}$$

где $P(x_i/\boldsymbol{\theta})$ – условная вероятность реализации x_i в i-ом наблюдении при фиксированном векторе неизвестных параметров $\boldsymbol{\theta} = |\theta_1, \theta_2, ..., \theta_l|$.

В отличие от метода квантилей отпадает необходимость рассчитывать эмпирическую функцию распределения. Функцию правдоподобия рассматривают как функцию вектора параметров, и максимально правдоподобные оценки (МП-оценки) находят из условия (1.13)

$$L(\mathbf{x}/\boldsymbol{\theta}) \to max. \tag{1.13}$$

В случае наиболее общих планов испытаний ([*NRT*], [*NRr*]) получаются многократно усечённые выборки. Они включают n_1 наработок t_1, t_2,…, t_{n1}, завершившихся отказами, и n_2 наработок τ_1, τ_2,…, τ_{n2}, в которых отказы не успели произойти. Вероятность того, что отказ произойдёт в момент t (точней на интервале от t до $t+dt$) равна элементу вероятности $f(t)dt$. Вероятность безотказной работы за время τ равна $P(\tau)=1–F(\tau)$. Откуда функция правдоподобия равна (1.12):

$$L = \prod_{i=1}^{n_1} f(t_i)dt_i \prod_{j=1}^{n_2}(1 - F(\tau_j)) \to max.$$

Для упрощения решения задачи функцию правдоподобия логарифмируют и опускают дифференциалы

$$ln L = \sum_{i=1}^{n_1} f(t_i) + \sum_{j=1}^{n_2}(1 - F(\tau_j)) \to max. \qquad (1.14)$$

Функция правдоподобия и её логарифм для двухпараметрического закона распределения Вейбулла имеют следующий вид:

$$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n_1} \frac{b}{a}\left(\frac{t_i}{a}\right)^{b-1} e^{-(t_i/a)^b} \prod_{j=1}^{n_2} e^{-(\tau_j/a)^b} \to max,$$

$$ln L(a,b) = n_1 ln b - n_1 b ln a + (b-1)\sum_{i=1}^{n_1} ln t_i - \left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i^b + \sum_{j=1}^{n_2} \tau_j^b\right) \Big/ a^b \to max. \qquad (1.15)$$

Найти оценки для параметров a^* и b^* можно непосредственно максимизируя функцию правдоподобия (1.15) одним из известных численных методов, например методом Ньютона, для этого имеется программное обеспечение. Для поиска максимума необходимо задавать начальные значения параметров. Итерационные методы медленно сходятся и вообще могут не сходиться. Процесс сходится тем быстрей, чем ближе начальные значения к точке максимума. В качестве начальных значений можно использовать оценки, найденные методом квантилей.

Вычисления могут быть упрощены, если составить и решить систему двух уравнений, продифференцировав выражение (1.15) по параметрам a и b.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial ln L}{\partial a} = -n_1 \dfrac{b}{a} + \left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i^b + \sum_{j=1}^{n_2} \tau_j^b\right)\dfrac{b}{a^{b+1}} = 0, \\ \dfrac{\partial ln L}{\partial b} = \dfrac{n_1}{b} - n_1 ln a + \sum_{i=1}^{n_1} ln t_i + \dfrac{ln a\left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i^b + \sum_{j=1}^{n_2} \tau_j^b\right)}{a^b} - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i^b ln t_i + \sum_{j=1}^{n_2} \tau_j^b ln \tau_j\right)}{a^b} = 0. \end{cases} \qquad (1.16)$$

Решение полученной системы относительно a и b даёт следующие выражения для МП-оценок:

$$1+\frac{b^*}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} ln\,t_i - b^*\frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^{b^*}\,ln\,t_i + \sum_{j=1}^{n_2}\tau_j^{b^*}\,ln\,\tau_j}{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^{b^*} + \sum_{j=1}^{n_2}\tau_j^{b^*}} = 0\,, \tag{1.17}$$

$$a^* = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^{b^*} + \sum_{j=1}^{n_2}\tau_j^{b^*}}{n_1}\right)^{1/b^*}. \tag{1.18}$$

Трансцендентное уравнение (1.17) не имеет аналитического решения, однако, оно легко решается, например, методом половинного деления, который всегда достаточно быстро сходится. Задача облегчается тем, что для всех устройств, у которых наблюдается приработка или износ и старение, диапазон возможных значений b невелик ($0{,}5 \le b \le 5$) и в этом диапазоне уравнение (1.17) имеет только один корень.

При *однократно усечённых планах* [*NUT*] и [*NUr*] в формулах (1.15), (1.17), (1.18) все безотказные наработки имеют *одинаковую длительность*, равную времени испытаний T и $\sum_{j=1}^{n_2}\tau_j^{b^*} = n_2T^{b^*}$, $\sum_{j=1}^{n_2}\tau_j^{b^*}\,ln\,\tau_j = n_2T^{b^*}lnT$.

В частном случае, если из априорной информации или результатов испытаний имеются достаточно веские основания считать, что закон распределения времени безотказной работы *экспоненциальный* или близок к экспоненциальному ($b\approx 1$), то формула (1.18) *упрощается*

$$a^* = \left(\sum_{i=1}^{n_1} t_i + \sum_{j=1}^{n_2}\tau_j\right)\Big/ n_1\,. \tag{1.19}$$

Упрощается и вид статистических данных для оценки параметра a, которая одновременно является оценкой и наработки на отказ T_0, требуется знать только суммарную наработку всех устройств $t_\Sigma = \sum_{i=1}^{n_1} t_i + \sum_{j=1}^{n_2}\tau_j$ и суммарное число отказов $n=n_1$. В этом случае неважно, сколько устройств испытывалось и как долго каждое из них проработало, когда и какие устройства отказывали, т.е. все планы испытаний становятся эквивалентными, а значения t_Σ и n являются достаточной статистикой

$$T_0^* = a^* = t_\Sigma/n,\ \lambda^* = 1/T_0^* = n/t_\Sigma\,. \tag{1.20}$$

Вместе с тем, если из-за недостаточного объёма статистики или недостоверной априорной информации предположение об экспоненциальном законе распределения окажется ошибочным, то расчёт по формуле (1.20) может приводить к очень большой погрешности.

Мы обычно заинтересованы получить результат оценки надёжности как можно быстрей, для чего и используются планы с усечёнными выборками. Вместе с тем представляет большой практический интерес вопрос о том, как влияет сокращение времени испытаний на точность получаемых оценок.

1.5 Точность статистических оценок. Интервальное оценивание параметров и числовых характеристик законов распределения

Точность статистических оценок чаще всего описывают с помощью доверительных интервалов. Доверительным называют интервал, который с заданной (доверительной) вероятностью накрывает неизвестное значение параметра или числовой характеристики. Законы распределения оценок параметров и числовых характеристик зависят от законов распределения исследуемых случайных величин и от метода оценивания.

Если объём статистических данных достаточно большой ($n \geq 50$) и метод оценивания позволяет находить оптимальные значения оценок, то в силу центральной предельной теоремы можно считать закон распределения оценки приближённо нормальным и рассчитывать границы доверительного интервала по квантилям нормального закона

$$\theta_н \approx \theta^* - z_\gamma \sigma_\theta^*, \quad \theta \approx \theta^* + z_\gamma \sigma_\theta^*, \tag{1.21}$$

где $\theta_н$, $\theta_в$ – нижняя и верхняя границы доверительного интервала;

z_γ – квантиль нормального закона распределения, при $\gamma = 0{,}95$ $z_\gamma = 1{,}96$.

В начале рассмотрим расчёт границ доверительного интервала числовых характеристик, найденных методом моментов, т.е. при плане испытаний [*NUN*]. Наибольший интерес представляет доверительный интервал для математического ожидания времени безотказной работы – наработки на отказ T_0. При $n \geq 50$

$$T_н = T_0^* - z_\gamma \sigma_T^*,\ T = T_0^* + z_\gamma \sigma_T^*,\ \ \sigma_T^* = \sigma_t^*/\sqrt{n}\,. \tag{1.22}$$

При недостаточном объёме статистики используют более точные методы, учитывающие закон распределения исследуемой случайной величины. Для экспоненциального закона распределения интервальное оценивание производится с помощью квантилей χ^2-распределения. Границы двустороннего доверительного интервала рассчитываются по следующим формулам. По заданной доверительной вероятности γ вычисляют $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = (1 - \gamma)/2$ и $\gamma_2 = 1 - \varepsilon_2$

$$T_н = T_0^* \cdot 2n/\chi_r^2(\varepsilon_1),\ T_0 = T_0^* \cdot 2n/\chi_r^2(\gamma_2),\ r = 2n, \tag{1.23}$$

где r – число степеней свободы.

Пример 1.1 Задан вариационный ряд n=40 распределённой по экспоненциальному закону случайной величины X (пусть наработки изделий $t = x\cdot 10^2$ час):

10	13	19	20	22	23	26	26	27	28
30	32	52	52	57	59	68	71	73	74
97	100	108	117	119	123	126	128	129	139
141	150	173	181	203	267	279	286	347	441

Требуется найти оценки m_x^* математического ожидания m_x, T_0^* наработки на отказ T_0, σ_x^* среднего квадратического отклонения σ_x, λ_x^* интенсивности отказов λ_x, а также для m_x и λ_x рассчитать границы доверительных интервалов, соответствующие доверительной вероятности γ=0,9.

Решение. Имеем m_x^*=(10+13+19+…+441)/40=110,9, T_0=11090 час;

D_x^*=[(10–110,9)^2+(13–110,9)^2+…+(441–110,9)^2]/39=9791,

$\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*} = \sqrt{9791} = 98{,}95$. Рассчитываем вероятности ε_1=0,05, γ_2=0,95, и число степеней свободы r=80. Из таблицы (приложение 4) находим $\chi_r^2(\varepsilon_1)$=60,4, $\chi_r^2(\gamma_2)$=101,9. Откуда доверительные границы $m_{н}$= 110,9·80/101,9=87,1, $T_{н}$=8710 час;

$m_{в}$=110,9·80/60,4=146,9, $T_{в}$=14690 час.

Интенсивность отказов λ_x=1/ T_0=0,902·10^{-4} 1/час,

$\lambda_{н}$=1/ $T_{в}$=0,681·10^{-4} 1/час, $\lambda_{в}$=1/ $T_{н}$=1,148·10^{-4} 1/час.

Большой практический интерес для высоконадёжных ИС представляют так называемые безотказные испытания, когда за время испытаний не происходит ни одного отказа. Очевидно, что нетривиальные оценки параметров (кроме $m_x^*\to\infty$) в этом случае получить невозможно. Вместе с тем, для экспоненциального закона можно получить пессимистическую границу доверительного интервала $m_{н}$ по формуле $m_{н}$= $T_{н}$ =2t_Σ/$\chi_r^2(\varepsilon_1)$, r=2, при γ=0,8, ε_1=0,1 $T_{н}$ =t_Σ/2,3 $\lambda_{в}$=1/ $T_{н}$= 2,3 /t_Σ.

Закон распределения Вейбулла имеет два параметра. Параметры и числовые характеристики двухпараметрического закона распределения по завершённым выборкам можно оценивать методом моментов. В более сложных ситуациях приходится использовать универсальный метод максимального правдоподобия. При использовании метода моментов точного решения для границ доверительных интервалов не существует. Если объём статистики достаточно большой, то можно делать расчёт по квантилям нормального распределения (1.22).

ПМ-оценки параметров имеют асимптотически нормальное распределение. В общем случае оценки коррелированны и для построения границ доверительного интервала требуется корреляционная матрица. Пусть, как и ранее, $\boldsymbol{\theta}=\left|\theta_1, \theta_2,..., \theta_l\right|$– вектор оцениваемых параметров. Корреляционная матрица рассчитывается через вторые производные функции правдоподобия $\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i \partial\theta_j}$. Так как выражения для вторых производных обычно довольно громоздкие, для упрощения можно использовать их математические ожидания по результатам испытаний. Составляют матрицу $\boldsymbol{W}$ с элементами $w_{ij} = -\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i \partial\theta j}\right)$ или $w_{ij} = -M\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta_i \partial\theta j}\right)$. Корреляционная матрица или матрица рассеяния $\boldsymbol{K}$ представляет собой матрицу, обратную $\boldsymbol{W}$: $\boldsymbol{K}= \boldsymbol{W}^{-1}$

$$K^*_{\theta i\theta j} = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta_W}, \tag{1.23}$$

где Δ_{ji} – алгебраическое дополнение элемента w_{ij} матрицы $\boldsymbol{W}$;

Δ_W – определитель матрицы $\boldsymbol{W}$.

При $I = j$ корреляционный момент равен дисперсии

$D^*_{\theta i}=K^*_{\theta i\theta j}$,

среднее квадратическое отклонение $\sigma^*_{\theta i} = \sqrt{D^*_{\theta i}}$.

Коэффициент корреляции $r^*_{\theta i\theta j} = \dfrac{K^*_{\theta i\theta j}}{\sigma^*_{\theta i}\sigma^*_{\theta j}}$.

Нормальное распределение l-мерного вектора оценок имеет следующий вид:

$$f(\boldsymbol{\theta})= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^l \Delta_K}} exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} w_{ij}(\theta^*_i - \theta_i)(\theta^*_j - \theta_j)\right], \tag{1.24}$$

где Δ_K – определитель матрицы рассеяния.

При заданной доверительной вероятности γ доверительный интервал имеет минимальный объём, если он представляет собой l-мерный эллипсоид рассеяния

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} w_{ij}(\theta'_i - \theta^*_i)(\theta'_j - \theta^*_j) = \chi^2_{l\gamma}, \tag{1.25}$$

где θ'_i – значение i-го параметра на границе доверительного интервала;

$\chi^2_{l\gamma}$ – квантиль χ^2-распределения с l степенями свободы, при уровне значимости γ.

В качестве обобщённого показателя точности оценивания удобно использовать относительный объём эллипсоида рассеяния

$$S_\gamma = \frac{z_{l\gamma}\sqrt{\Delta_K}}{\theta^*_1\theta^*_2\ldots\theta^*_l}, \tag{1.26}$$

где $z_{l\gamma}=\psi_l\cdot(\chi^2_{l\gamma})^{l/2}$,

ψ_l – коэффициент связи l-мерный эллипсоида с его полуосями; значения $z_{l\gamma}$ и ψ_l при l=1,…,5 и γ=0,9 приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

l		1	2	3	4	5
ψ_l		2	π	$4\pi/3$	$\pi/2$	$8\pi/15$
$\gamma=0,9$	$\chi^2_{l\gamma}$	2,71	4,61	6,25	7,87	9,24
	$z_{l\gamma}$	3,29	14,47	65,45	298,7	1366

Может возникнуть необходимость оценить доверительный интервал для одного из оцениваемых параметров, например, θ_i. В этом случае возможны различные постановки задачи и разные подходы к её решению. Если рассчитывать доверительный интервал так же, как для однопараметрического закона, то нужно правильно понимать и использовать полученный результат.

Смысл заключается в том, что от закона распределения системы случайных величин $f(\theta_1^*, \theta_2^*,\ldots,\theta_l^*)$ мы переходим к закону распределения одной из них – параметра θ_i^* $f_i(\theta_i^*)$. Тем самым с заданной вероятность γ ограничивается доверительный интервал только для этого одного параметра. Тогда на все остальные параметры никаких ограничений не накладывается, и они могут сколь угодно сильно отличаться от найденных оценок. Если доверительная вероятность совместного доверительного интервала будет равна $\gamma_l=\gamma_1^l$, например, при $l=5$, $\gamma_1=0{,}9$ $\gamma_l=0{,}9^5=0{,}59$. При наличии корреляции желательно за величину доверительного интервала брать проекцию эллипсоида рассеяния с центром в точке θ_i^* на ось этого параметра.

В случае двухпараметрического закона распределения Вейбулла времени безотказной работы корреляционная матрица рассчитывается через матрицу $\boldsymbol{W}$ вторых производных функции правдоподобия $w_{11}=-\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2}$,

$w_{12}=w_{21}=-\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial a\partial b}$, $w_{22}=-\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial b^2}$. Корреляционная матрица или матрица рассеяния $\boldsymbol{K}$ представляет собой матрицу, обратную $\boldsymbol{W}$: $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{W}^{-1}$

$$K_{ij}^* = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta_W}, \tag{1.27}$$

где Δ_{ji} – алгебраическое дополнение элемента w_{ij} матрицы $\boldsymbol{W}$;

Δ_W – определитель матрицы $\boldsymbol{W}$.

Диагональные элементы корреляционной матрицы представляют собой дисперсии

$D^*_a=K^*_{11}$, $D^*_b=K^*_{22}$,

средние квадратические отклонения $\sigma_a^*=\sqrt{D_a^*}$, $\sigma_b^*=\sqrt{D_b^*}$.

Коэффициент корреляции $r_{ab}^*=\dfrac{K_{12}^*}{\sigma_a^*\sigma_b^*}$.

Нормальное распределение вектора оценок a, b имеет следующий вид:

$$f(a,b)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\Delta_K}}exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}w_{ij}(a^*-a)(b^*-b)\right], \tag{1.28}$$

где Δ_K – определитель матрицы рассеяния.

При заданной доверительной вероятности γ доверительный интервал представляет собой эллипс рассеяния

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}w_{ij}(a'-a^*)(b'-b^*)=\chi^2_{2\gamma}, \tag{1.29}$$

где a', b' – значения параметров на границе доверительного интервала;

$\chi^2_{2\gamma}$ – квантиль χ^2-распределения с двумя степенями свободы, при уровне значимости γ.

Для закона распределения Вейбулла и наиболее сложных планов с непрерывным контролем и многократно усечёнными выборками [*NRT*] и [*NRr*], продифференцировав (1.15), получим элементы матрицы $\boldsymbol{W}$

$$w_{11} = -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} = \frac{b}{a^2}\left(-n_1 + S_1(b+1)\right), \tag{1.30}$$

$$w_{12} = -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a \partial b} = \frac{1}{a}\left(n_1 - S_1 - S_2 b\right), \tag{1.31}$$

$$w_{22} = -\frac{\partial^2 \ln L}{\partial^2 b} = \frac{n_1}{b^2} - S_2 \ln a + S_3, \tag{1.32}$$

где $S_1 = \sum_{i=1}^{n_1}(t_i / a)^b + \sum_{j=1}^{n_2}\tau_j / a)^b$,

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n_1}(t_i / a)^b \ln(t_i / a) + \sum_{j=1}^{n_2}\tau_j / a)^b \ln(\tau_j / a),$$

$$S_3 = \sum_{i=1}^{n_1}(t_i / a)^b \ln(t_i / a)\ln t_i + \sum_{j=1}^{n_2}\tau_j / a)^b \ln(\tau_j / a)\ln \tau_j.$$

Часто вместо построения доверительного интервала в виде эллипса рассеяния бывает достаточно рассчитать приближённые доверительные интервалы для каждого из оцениваемых параметров без учёта их взаимной корреляции. Тогда задача решается значительно проще по приближённой формуле (1.21)

$$a_{\text{н}} = a^* - z_\gamma \sigma_a^*, \quad a_{\text{в}} = a^* + z_\gamma \sigma_a^*; \tag{1.33}$$

$$b_{\text{н}} = b^* - z_\gamma \sigma_b^*, \quad b_{\text{в}} = b^* + z_\gamma \sigma_b^*, \tag{1.34}$$

где $\sigma_a^* = \sqrt{1/w_{11}}$, $\sigma_b^* = \sqrt{1/w_{22}}$.

Следует иметь ввиду, что точные границы несколько шире, чем рассчитанные по формулам (1.33), (1.34).

Для ИС непрерывного использования наибольший интерес представляет оценка наработки на отказ, точность которой мало зависит от точности параметра b, так как зависимость $\gamma_1(b)$ изменяется в узких пределах. Поэтому, если требуется оценить только точность наработки на отказ, определяют доверительный интервал для параметра a по сравнительно простой формуле (1.33).

В качестве обобщённого показателя точности оценивания целесообразно использовать относительную площадь эллипса рассеяния (в относительных единицах или в процентах)

$$S_\gamma = \frac{14{,}47\sqrt{\Delta_K}}{a^* b^*}. \tag{1.35}$$

При малом объёме выборки *(n_1<50)* расчёт границ доверительного интервала по квантилям распределения Гаусса может давать большие погрешности, поэтому следует учитывать закон распределения времени безотказной работы устройств. Для экспоненциального закона распределения оценка λ^* имеет χ^2-

распределение на уровне ε или 1 – ε (ε=(1 – γ)/2) с числом степеней свободы $2n$ или $2n+2$. Границы доверительного интервала рассчитываются по формулам

- планы [*NUN*], [*NUr*], [*NRr*] $\lambda_B = \dfrac{\chi^2_{1-\varepsilon,2n}}{2t_\Sigma}$;
- планы [*NUT*], [*NRT*] $\lambda_B = \dfrac{\chi^2_{1-\varepsilon,2n+2}}{2t_\Sigma}$;
- все планы $\lambda_H = \dfrac{\chi^2_{\varepsilon,2n}}{2t_\Sigma}$.

При распределении Вейбулла приближённые границы доверительного интервала для параметра *a* можно рассчитать путём приведения его к экспоненциальному распределению. Пусть $F(t)=1-exp(-t/a)^b$. Приняв $b=b^*$, $t^*=t^{b*}$, $\alpha = 1/a^{b*}$, получим экспоненциальное распределение $F(t^*)=1-exp(-\alpha t^*)$. Учитывая замену переменной, значение t_Σ рассчитывается по формуле $t_\Sigma = \sum_{i=1}^{n_1} t_i^{b*} + \sum_{j=1}^{n_2} \tau_j^{b*}$.

Значения $\alpha_н$, $\alpha_в$ рассчитываются по формуле для экспоненциального распределения, а доверительные границы параметра масштаба *a* – обратным пересчётом $a = 1/\alpha^{1/b*}$.

1.6 Проверка статистических гипотез о законе распределения

При ограниченном объёме статистических данных из-за их случайного разброса, как правило, невозможно однозначно ответить на вопрос о соответствии принятой математической модели результатам наблюдений, в частности, о правильности выбора закона распределения. Эта задача решается с помощью статистических критериев или критериев согласия.

Идея проверки статистических гипотез состоит в следующем. Выдвигается основная гипотеза H0 и простая альтернативная гипотеза H1. Альтернативных гипотез может быть несколько H_1, H_2, H_3,…, их называют сложной альтернативой. Задачу можно представить в следующем виде.

Гипотеза H_0		
	Принята	
Верна	да	нет
да	1–α	α
нет	β	1–β

Возможны два вида ошибок:
– гипотеза H_0 верна, но в результате проверки отвергнута, это ошибка первого рода;
– гипотеза H_0 ошибочна, но принята, это ошибка второго рода.

Здесь α – вероятность ошибки первого рода, т.е. вероятность ошибочно отвергнуть правильную гипотезу, её называют уровнем значимости критерия;

β – вероятность ошибки второго рода, т.е. вероятность ошибочно принять неправильную гипотезу, величину 1–β называют мощностью критерия. Вероятности α и β стремятся минимизировать.

Для решения задачи формируется некоторая случайная величина U, называемая критерием. Критерий должен отражать случайный разброс статистических данных и, в случае справедливости гипотезы H_0, иметь известную функцию распределения $F(u)$. Пусть по статистическим данным мера расхождения U примет значение u^*. Если вероятность события $U \geq u^*$ весьма мала, $P(U \geq u^*) = 1 - F(u) \leq \alpha$, то гипотезу H_0 следует отвергнуть как малоправдоподобную в пользу альтернативной гипотезы H_1, если вероятность значительна, то отвергнуть гипотезу H_0 оснований нет. Обычно для α принимают значения 0,05; 0,02 или 0,01. В большинстве случаев строго сформулировать альтернативные гипотезы не удаётся, поэтому не представляется возможным нормировать и рассчитывать мощность критерия.

Для проверки соответствия выбранного закона распределения статистическим данным чаще всего используются *критерий Пирсона* (критерий χ^2) и *критерий Колмогорова*. Осуществлять выбор закона распределения и проверять его по критериям целесообразно, если объем статистики достаточен, по крайней мере не менее 100 реализаций, иначе выводы будут мало достоверны.

1.6.1 Критерий Пирсона

Критерий Пирсона. Для проверки гипотезы о законе распределения по критерию Пирсона используются сгруппированные данные, которые включают общий объём статистики n, числа реализаций $m_1, m_2, \ldots, m_L$, попавших в каждый временной интервал с границами g_0, g_1, $g_2, \ldots, g_l$, L – количество интервалов наблюдения. Если исходные данные не сгруппированы, их следует сгруппировать, как это описано в п. 1.3.

Выдвигается гипотеза H_0, что случайная величина T имеет функцию распределения $F(t)$. В качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределением принимается сумма U квадратов отклонений статистической частоты $p_j^* = m_j/n$ от вероятности p_j ($1 \leq j \leq L$) попадания случайной величины X в последовательные интервалы. Квадраты отклонений нормируются по вероятностям p_j:

$$U = n\sum_{j=1}^{L}\frac{(p_j^* - p_j)^2}{p_j} = \sum_{j=1}^{L}\frac{(m_j - np_j)^2}{np_j}. \qquad (1.\,36)$$

Если гипотеза H_0 справедлива, то величина U имеет χ^2-распределение с r степенями свободы. Число степеней свободы r равно числу интервалов L за вычетом числа связей, обусловленных тем, что по этим же статистическим данным определяется s неизвестных параметров закона распределения $F(t)$, а также наличием условия, что сумма реализаций, попавших в интервалы, равна общему объёму статистики $n = \sum_{j=1}^{l} m_j$, откуда $r = L - s - 1$.

Если при $\chi^2_{r\alpha} = U$ и $P(\chi^2_{r\alpha}) < \alpha$ или при $P(\chi^2_{r\alpha}) = \alpha$ и $U > \chi^2_{r\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α как противоречащая статистическим данным, в противном случае оснований отвергать гипотезу H_0 нет. Вероятность ошибки первого рода отвергнуть правильную гипотезу α обычно принимают равной 0,05. При ограниченном объёме статистики не следует стремиться слишком уменьшить значение α, так как при этом возрастает неконтролируемая ошибка второго рода β – вероятность принять ошибочную гипотезу.

Вероятности p_j рассчитываются как разность функции распределения в конце и в начале интервала

$$p_j = F(g_j) - F(g_{j-1}) = \int_{g_{j-1}}^{g_j} f(x)dx. \qquad (1.37)$$

Интересно отметить следующее: в случае слишком маленьких расхождений между теоретическим и статистическим распределением, вероятность которых мала 1 – α<0,05, это может свидетельствовать о том, что данные подтасованы.

1.6.2 Критерий Колмогорова

Критерий Колмогорова. Исходными данными для проверки закона распределения по критерию Колмогорова является не сгруппированная выборка в виде вариационного ряда $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$, по которому рассчитывается эмпирическая функция распределения $F^*(t_i)$. Так как эмпирическая функция представляет собой ступенчатую ломаную, она в каждой точке x_i имеет два значения (i – 1)/n и i/n.

Выдвигается гипотеза H_0, что случайная величина T имеет функцию распределения $F(t)$. В качестве меры расхождения между теоретическим и эмпирическим распределением рассматривается максимальное абсолютное расхождение D_λ между функциями распределения $F^*(t_i)$, $F(t_i)$:

$$D_\lambda = \max_i \left| F^*(t_i) - F(t_i) \right|. \qquad (1.38)$$

При числе наблюдений n случайная величина $\lambda = D_\lambda \sqrt{n}$ имеет предельное распределение Колмогорова $P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$. Значения вероятности $P(\lambda)$ приведены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

$P(\lambda)$	0,20	0,10	0,05	0,02
λ	1,07	1,22	1,36	1,51

Если $D_\lambda \ge \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}$, то гипотеза H_0 должна быть отвергнута на уровне значимости α = $P(\lambda)$ как противоречащая статистическим данным, в противном случае отвергнуть гипотезу H_0 нет оснований. Вероятность α обычно принимают 0,05, 0,1 или даже 0,2, так как параметры теоретического закона распределения определяются по тем же статистическим данным, что и функция $F^*(x)$, и тогда формула (1.38) дает для D_λ заниженные значения.

Особенности проверки статистических гипотез о законе распределения по усечённым выборкам состоят в том, что, во-первых, проверка производится только в пределах полных реализаций и, во-вторых, для многократно усечённых выборок используются интенсивность отказов и функция выработанного ресурса. Мощность критериев меньше, чем при полных выборках и зависит не только от числа происшедших отказов, но и от длительности испытаний. Для всех законов распределения, кроме экспоненциального, уменьшение длительности испытаний невозможно скомпенсировать соответствующим увеличением числа устройств, поставленных на испытания.

Критерий Пирсона. Проверка гипотезы о законе распределения производится по сгруппированным данным.

Для однократно усечённой выборки исходные данные включают общее число устройств N, поставленных на испытания, значения полных реализаций $m_1, m_2, \ldots, m_L$, попавших в каждый временной интервал с границами g_0, g_1, $g_2, \ldots, g_L$, где L – количество интервалов наблюдения. Если исходные данные не сгруппированы, их следует сгруппировать, как это описано в п. 1.1. Расчёт относительной суммы U квадратов отклонений статистического числа отказов в последовательных интервалах от теоретических значений производится по формуле (1.39), аналогичной (1.36), только в неё добавляется ещё один $(L+1)$-й интервал за пределами времени испытаний

$$U = \sum_{j=1}^{L} \frac{(m_j - Np_j)^2}{Np_j} + \frac{(n_2 - Np_{L+1})^2}{Np_{L+1}}, \tag{1.39}$$

где $p_{L+1} = 1 - \sum_{j=1}^{L} p_j$ – вероятность того, что устройство не откажет за время испытаний;

n_2 – число неполных реализаций.

Для многократно усеченной выборки расчёт производится несколько по иному.

Во-первых, количество испытываемых изделий изменяется от интервала к интервалу. Среднее число испытываемых изделий N_j в j-ом интервале равно

$$N_j = N_{j-1} - (m_{j-1} + k_{j-1} + m_j + k_j)/2, \; N_1 = N + n_1 - (m_1 + k_1)/2, \tag{1.40}$$

где N – число устройств, поставленных на испытания;

n_1 – число полных реализаций;

m_j – число устройств, отказавших в течение j-го интервала;

k_j – число безотказно работавших устройств, испытание которых прервано в течение j-го интервала.

В формуле (1.36) необходимо учитывать изменение числа испытываемых изделий

$$U = \sum_{j=1}^{L} \frac{(m_j - N_j p_j)^2}{N_j p_j}. \qquad (1.41)$$

Во-вторых, вероятности p_j рассчитываются как приращение функции выработанного ресурса в течение j-го интервала

$$p_j = \Lambda(g_j) - \Lambda(g_{j-1}) = \int_{g_{j-1}}^{g_j} \lambda(x)dx. \qquad (1.42)$$

Для закона распределения Вейбулла

$$p_j = (g_j/a)^b - (g_{j-1}/a)^b. \qquad (1.43)$$

Далее процедура проверки производится обычным образом. Выдвигается гипотеза H_0, что случайная величина T имеет функцию распределения $F(t)$. Если гипотеза H_0 справедлива, то величина U имеет χ^2-распределение с r степенями свободы. Число степеней свободы r равно числу интервалов за вычетом числа связей, обусловленных тем, что по этим же статистическим данным определяется s неизвестных параметров закона распределения $F(x)$. Кроме того, для однократно усечённой выборки сумма реализаций, попавших в $L + 1$ интервалы, равна общему объёму статистики $N = \sum_{j=1}^{L+1} m_j$, откуда

$$r = L + 1 - s - 1 = L - s.$$

Для многократно усечённой выборки сумма реализаций, попавших в L интервалов, не равна общему объёму статистики, поэтому тоже $r = L - s$.

Если при $\chi^2_{r\alpha} = U$ и $P(\chi^2_{r\alpha})<\alpha$ или при $P(\chi^2_{r\alpha}) = \alpha$ и $U>\chi^2_{r\alpha}$, то гипотеза H_0 отвергается на уровне значимости α как противоречащая статистическим данным, в противном случае оснований отвергать гипотезу H_0 нет.

Критерий Колмогорова. Исходными данными для проверки закона распределения по критерию Колмогорова является эмпирическая функция распределения $F^*(x_i)$ для однократно усечённой выборки, рассчитываемая по обычной формуле $F^*(x_i)=i/n$. Для многократно усечённой выборки, оценку функции распределения можно рассчитать через функцию выработанного ресурса $\Lambda(t)$. Функция $\Lambda^*(t)$ тоже рассчитывается только в точках полных реализаций. Приращение функции выработанного ресурса $\Delta\Lambda^*_i$ рассчитывается по формуле

$$\Delta\Lambda_i^* = 1/(n + 1 - I - l_i) \qquad (1.44)$$

и далее

$$\Lambda_i^* = \Lambda_{i-1}^* + \Delta\Lambda_i^*, \qquad \Lambda_0^*=0. \qquad (1.45)$$

По значениям Λ_i^* рассчитываются функция надёжности $P^*(t)$ и функция распределения времени безотказной работы $F^*(t)$

$$P_i^* = exp(-\Lambda_i^*), \quad F_i^* = 1-exp(-\Lambda_i^*). \qquad (1.46)$$

В качестве меры расхождения между теоретическим и статистическим распределением рассматривается максимальное абсолютное расхождение D_λ между функциями распределения $F^*(x_i)$, $F(x_i)$ (1.38):

Если $D_\lambda \geq \dfrac{\lambda}{\sqrt{n}}$, то гипотеза H_0 должна быть отвергнута на уровне значимости $\alpha = P(\lambda)$ как противоречащая статистическим данным, в противном случае отвергнуть гипотезу H_0 нет оснований. Здесь λ имеет распределение Колмогорова (таблица 1.4).

Пример 1.1 Произведено моделирование испытаний по классическому плану [*NUN*], при законе распределения Вейбулла с параметрами $a = 1000$, $b = 2{,}5$ и числом испытываемых изделий $N = 250$. Используя при обработке не все, а только первую часть статистических данных можно получить результаты для однократно усечённых испытаний по планам [*NUT*] или [*NUr*] и затем сравнить их с классическими. Для исследования влияния степени усечёния испытаний на точность результатов удобней использовать план [*NUr*]. Рассмотрены усеченные планы $r = 50, 100, 150, 200$.

Решение. Результаты моделирования значений наработки изделий до отказа (всего 250 величин) из-за громоздкости в таблице 1.2 приводятся не полностью.

Таблица 1.2

30	104	147	155	179	215	217	237	239	249
…	1579	1584	1611	1618	1637	1713	1832	1836	1857

В начале по всей выборке находятся оценки числовых характеристик методом моментов. Получаются следующие результаты: математическое ожидание наработки на отказ $T_0^* = m_x^* = 876{,}9$, среднее квадратическое отклонение $\sigma_x^* = 377{,}8$, коэффициент вариации $v_x^* = 0{,}4309$. По данным таблицы приложения 6 определяются оценки параметров закона: $b^* = \gamma_3^{-1}(v_x^*) = 2{,}48$, $a^* = m_x^*/\gamma_1(b^*) = 876{,}9/0{,}8871 = 988{,}5$. Решение задачи по этой же выборке путём максимизации функции правдоподобия (1.15) методом Ньютона, естественно, даёт практически тот же результат: $b^* = 2{,}485$, $a^* = 988$. Наработка на отказ равна $T_0^* = a^*\gamma_1(b^*) = 877{,}2$.

К усечённым выборкам применим только метод квантилей и метод максимального правдоподобия. Второй из них точней, поэтому используем его. Результаты расчётов приведены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

Объём испытаний r	250	200	150	100	50
Время испытаний T	1857	1200	988	761	535
Параметр масштаба a^*	988	998	1030	1033	1102
Параметр формы b^*	2,485	2,38	2,23	2,22	2,08
Наработка на отказ T_0^*	877	884	913	915	976
Экспоненциальное распределение T_0^*	1069	1043	1286	1645	2495

Зависимость точности результатов от времени испытаний наглядней всего оценивать по наработке на отказ T_0. На рис. 1 представлена зависимость относительной погрешности от отношения времени испытаний к наработке на отказ $\Theta = T/T_0$. Относительное время испытаний полной выборки по классическому плану [NUN] в проведенном моделировании с исходными данными N = 250 и b = 2,5 составила Θ = 2,12. При сокращении времени испытаний даже в 3,5 раза статистическая погрешность увеличивается примерно всего на 10 %, что практически вполне допустимо.

Большой интерес представляет оценка погрешности при неверном выборе закона распределения, в частности, если принять экспоненциальный закон распределения, расчёт наработки на отказ производится по формуле (1.18), результаты расчёта приведены в последней строке табл. 1.3 и рис. 1. Если время испытаний равно или больше наработки на отказ то погрешность составляет 20…50 %, что значительно больше, чем погрешность от усечения выборки при правильном выборе модели. При сокращении времени испытаний $\Theta<1$ и ошибочной модели времени безотказной работы погрешность возрастает почти до трёхкратной величины. Если рассмотреть ещё большее сокращение времени испытаний, например, в 20 раз до T = 93, то за это время происходит всего один отказ. В этом случае по статистическим данным определить закон распределения невозможно. Приняв закон распределения экспоненциальным, по формуле (1.18) получается $T_0 = (93{\cdot}249 + 30)/1 = 23187$, т.е. более, чем в 26 раз завышенная надёжность. И даже если в качестве показателя надёжности использовать нижнюю границу доверительного интервала, метод расчёта которой описан в п.1.4, $T_н = 23187{\cdot}2/\chi^2_{0,9;4} = 5961$, погрешность получается недопустимо большой. Увеличение числа испытываемых изделий не улучшает результат, необходимо увеличивать время испытаний, чтобы можно было проверить гипотезу о правильности выбранного закона распределения.

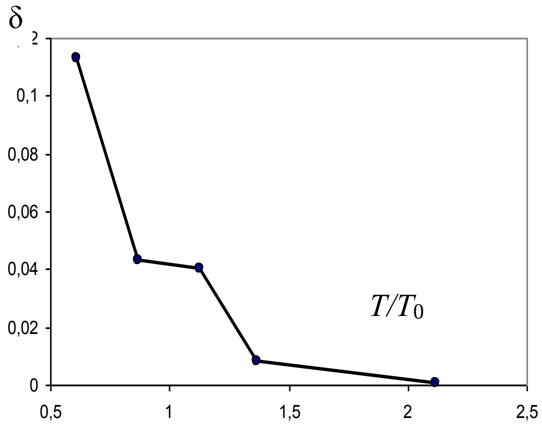


Рис. 1. Относительная погрешность оценки наработки на отказ от относительного времени испытаний

2 МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

2.1 Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)

Метод статистических испытаний (Монте-Карло) позволяет исследовать надёжность систем практически при любой самой общей постановке задачи, снимая все ограничения, связанные с марковским характером процессов, стационарностью и т.д.

Суть метода Монте-Карло состоит в следующем. Создаётся модель процесса функционирования (отказы, восстановления, профилактика) исследуемой системы, алгоритм и компьютерная программа, имитирующие этот процесс. Проводятся многократные имитационные эксперименты (их также называют розыгрыши или прогоны) и накапливаются статистические данные о траекториях процесса. На основе полученных данных методами математической статистики определяются показатели надёжности системы.

Особенность метода Монте-Карло заключается в том, что получаемые статистические оценки искомых параметров случайны. В соответствии с предельными теоремами теории вероятностей при бесконечном числе испытаний они сходятся по вероятности к искомым параметрам. При ограниченном числе испытаний N возникает погрешность, величина которой в силу закона больших чисел обратно пропорциональна квадратному корню из числа испытаний. Следовательно, для уменьшения погрешности на один порядок объем испытаний необходимо увеличить на два порядка. Это приводит к значительным затратам компьютерного времени. Увеличение сложности системы приводит к примерно пропорциональному увеличению затрат машинного времени, поэтому метод Монте-Карло наиболее эффективен при исследовании сложных систем, для которых отсутствует аналитическое решение, и при этом требования к точности решения находятся в разумных пределах. Вместе с тем, при многовариантных исследованиях высоконадёжных отказоустойчивых систем требуемый объём испытаний часто становится непомерно большим, и приходится применять специальные методы ускорения моделирования.

Основу алгоритмов моделирования составляет датчик случайных чисел (ДСЧ). В настоящее время обычно используются программные ДСЧ, это специальные программы, построенные на основе рекуррентных алгоритмов, такие программы встроены во все современные языки программирования и большинство пользовательских пакетов. Имеются и специальные языки статистического моделирования.

На выходе датчиков случайных чисел получают случайную величину r, имеющую равномерный закон распределения в интервале [0,1].

$$f(r)=\begin{cases} 1 \;\; \text{при}\; 0 \le r \le 1, \\ 0 \;\; \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad F(r)=\begin{cases} 0 \;\; \text{при}\; r<0, \\ r \;\; \text{при}\; 0 \le r \le 1, \\ 1 \;\; \text{при}\; r>1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Строго говоря, ДСЧ вырабатывают последовательности не случайных, а так называемых псевдослучайных чисел. Они должны удовлетворять многим требованиям (равномерности, независимости, большому циклу повторяемости и т.д.), их проверяют по статистическим критериям

Важная область применения метода Монте-Карло связана с тем, что в отличие от реальных испытаний нам известно, какие исходные данные мы заложили в модель, т.е. «истинные» показатели надёжности. Это позволяет оценивать точность используемых приближённых моделей, аналитических и статистических методов.

Моделирование случайных событий. Рассмотрим в начале моделирование одного события. Пусть событие А наступает с вероятностью p_A. ДСЧ в i-м испытании реализует равномерно распределенную в [0, 1] случайную величину r_i. Будем считать, что если удовлетворяется неравенство

$$r_i \le p_A, \tag{2.2}$$

то событие A наступило, т.е. $A=1$ («истина»), в противном случае наступило противоположное событие $\overline{A}$, т.е. $A=0$ («ложь»). Действительно, вероятность попадания r_i в интервал $[0, p_A]$ равна

$$\int_0^{p_A} f(r)dr = \int_0^{p_A} dr = p_A. \tag{2.3}$$

При моделировании двух или более независимых случайных событий описанную процедуру можно выполнять последовательно для каждой величины. Аналогично моделируются и зависимые случайные события, только при розыгрыше каждого следующего события в неравенстве (2.2) используют условные вероятности при условии, что предыдущие события уже произошли, либо не произошли.

Рассмотрим моделирование несовместных случайных событий. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots, A_n$ – полная группа событий, наступающих с вероятностями p_1, $p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k + \ldots + p_n = 1. \tag{2.4}$$

Для моделирования несовместных событий вводятся вспомогательные величины g_k, $0 \le k \le 1$:

$$g_k = \sum_{j=1}^{k} p_j \quad (g_0 = 0; g_n = 1). \tag{2.5}$$

Считается, что в i-м испытании осуществилось событие $A_k = 1$ ($A_j = 0$ при $j \ne k$), если случайная величина r_i, полученная с ДСЧ, удовлетворяет условиям:

$$g_{k-1} < r_i \le g_k, \quad 1 \le k \le n \;. \tag{2.6}$$

Процедура моделирования испытания в этом случае состоит в розыгрыше случайной величины r_i и последовательном ее сравнении с величинами g_k. Результатом испытания является событие A_k, выбранное из условия (2.6). Такую процедуру часто называют выбором по жребию в соответствии с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$.

Моделирование случайных величин. Как известно, случайные величины могут быть непрерывными и дискретными (НСВ и ДСВ), они моделируются несколько по разному. Существует два метода формирования случайных величин с заданным законом распределения на основе ДСЧ, вырабатывающего равномерно распределенные случайные числа r в интервале [0,1]:

- метод обратной функции;
- метод, основанный на математическом смысле случайной величины.

В основе метода обратной функции лежит следующая теорема: какой бы закон распределения $F(x)$ ни имела случайная величина X, функция случайного аргумента $z(x)$, равная

$$z(x) = F(x), \tag{2.7}$$

имеет равномерное распределение в интервале [0,1]. Приравняв $z=r$ и решив уравнение (2.7) относительно x, получим

$$x = F^{-1}(r), \tag{2.8}$$

где $F^{-1}(r)$ – функция, обратная функции распределения $F(x)$.

Идея метода обратной функции показана на рис. 2. Этот метод удобен в тех случаях, когда существует аналитическое выражение для функции распределения $F(x)$ и обратной функции $F^{-1}(r)$.

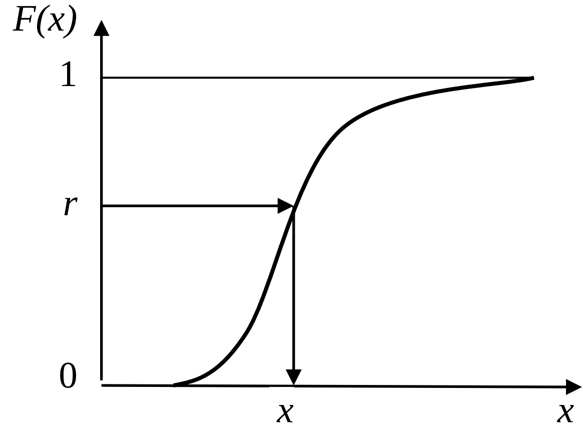


Рис. 2. Моделирование случайных величин методом обратной функции

В тех случаях, когда аналитическое выражение для $F(r)$ не существует, используют метод, основанный на математическом смысле случайной величины, для которого нет общей процедуры, пригодной для всех законов распределения.

Примеры применения метода обратной функции.

Равномерное распределение:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a} = r. \tag{2.9}$$

Решив (2.9) относительно x, получим

$$x = a + r(b - a). \tag{2.10}$$

Экспоненциальный закон распределения: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = r$,

Откуда

$$x = -ln(1 - r)/\lambda\ . \tag{2.11}$$

Закон распределения Вейбулла. Для закона Вейбулла решение получается аналогично экспоненциальному закону, являющемуся частным случаем закона Вейбулла при b=1: $F(x)=1-e^{-(\lambda/a)^b}$,

откуда

$$x=a[-\ln(1-r)]^{(1/b)}. \qquad (2.12)$$

Моделирование потоков отказов. Отказы информационных систем обычно образуют поток случайных событий. Задать поток случайных событий – значит описать закон распределения последовательности случайных величин $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k, \ldots$ моментов наступления 1-го, 2-го, …, k-го,… отказов от начала отсчёта $t=0$ или последовательности случайных величин t_1, t_2,…, t_k,… интервалов между отказами:

$$\begin{gathered} \tau_1 = t_1, \\ \tau_2 = t_1 + t_2 = \tau_1 + t_2, \\ \ldots \\ \tau_k = t_1 + t_2 + \ldots + t_k = \tau_{k-1} + t_k. \end{gathered} \qquad (2.13)$$

Наиболее общее описание потоков произвольной структуры – плотность распределения системы случайных величин $f(t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots)$. В теории надёжности рассматриваются потоки без последействия и с ограниченным последействием, для которых t_1, t_2,…, t_k,… независимые случайные величины и

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots) = f(t_1)f(t_2)\ldots f(t_k)\ldots\,. \qquad (2.14)$$

Проще всего моделируются рекуррентный поток без запаздывания, для которого $f(t_1) = f(t_2) = \ldots = f(t_k) = \ldots = f(t)$. По существу моделирование потока сводится к последовательному моделированию времени между отказами по заданному закону распределения. Рекуррентный поток с запаздыванием (поток Пальма) отличается только тем, что имеет другой закон распределения до первого отказа $F_1(t)$

$$F_1(t) = \omega\int_0^t [1 - F(x)]dx.$$

Этот закон моделировать сложно, так как он обычно не описывается аналитически и не имеет ясного математического смысла. Поэтому поступают согласно смыслу потока Пальма: переносят начало координат на некоторый произвольный интервал времени, за которое успеет произойти в среднем хотя бы 5…7 отказов и поток достигнет стационарного режима.

Простейший поток – это частный случай рекуррентного потока, для которого интервалы времени между отказами подчиняются экспоненциальному закону распределения с параметром λ: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Поток стационарен с самого начала.

Другим видом потока, который используется для описания надёжности систем, является нестационарный пуассоновский поток, т.е. поток ординарный без последствия и с переменным параметром $\lambda(t)$. Функция распределения интервалов между отказами в этом потоке имеет вид

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)dt}. \qquad (2.15)$$

Моделирование интервалов между отказами для нестационарного пуассоновского потока можно осуществлять по формуле, аналогичной (2.15):

$$t_i = \left[-ln(1-r_i)\right]/\lambda(t), \tag{2.16}$$

где $\lambda(t)$ – интенсивность отказов в момент t.

Величину $\lambda(t)$ можно приближенно принять для начального момента времени $t = t_{i-1}$, если за время t_i величина $\lambda(t)$ изменяется незначительно, либо взять первое уточнение, приняв среднее значение $\lambda_{ср}$ на интервале $[t_{i-1}, t_i]$, либо величину t_i определить из интегрального уравнения

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(t)dt = -ln(1-r_i), \tag{2.17}$$

решая его относительно t_i, например, численным методом.

3 ЗАДАНИЕ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ «МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ»

1. Осуществить статистическое моделирование определительных испытаний для *времени безотказной работы*, распределенного по закону распределения *Вейбулла*. Значения параметров закона распределения Вейбулла: a=2000–100·S_1, b=2,25+0,05·S, где S – сумма последней и предпоследней цифры номера студента, S_1 – последняя цифра номера студента.
2. В начале использовать план [NUN] с N=200.
3. Оценить числовые характеристики *методом моментов* для выборки, полученной по плану [NUN].
4. Оценить параметры закона распределения Вейбулла для плана [NUN], построить теоретическую и эмпирическую функции распределения.
5. Проверить закон распределения по критерию Колмогорова.
6. Затем из полной выборки получить однократно *усеченные выборки* по плану [NUr], r = 150, 100, 50, 20.
7. Оценить параметры закона распределения Вейбулла МП-методом для планов [NUr], (r = 150, 100, 50, 20).
8. Оценить числовые характеристики закона распределения и показатели надежности для планов [NUr], (r = 150, 100, 50, 20).
9. Рассчитать и построить зависимость относительной погрешности наработки на отказ от относительного времени испытаний.

4 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Исходные данные

Параметры закона распределения Вейбулла:

a = 1010

b = 2,55

N = 200 – количество испытуемых приборов (или количество моделируемых времен безотказной работы приборов).

Моделирование результатов эксперимента происходит методом Монте-Карло для закона Вейбулла по следующей формуле:

$$t_i = a(-\ln(1-r))^{1/b},$$

где r – случайная величина, равномерно распределенная на интервале от 0 до 1;

t_i – время безотказной работы исследуемого i-того прибора, вариационный ряд.

Для этого сначала заполняем столбец «$r1$» из N – элементов случайными числами с помощью встроенной функции **Excel =СЛЧИС(),** расположенной в категории «**Математические**». Далее, для того чтобы полученные числа не изменялись в течение работы, необходимо их скопировать и вставить с помощью специальной вставки. Для этого выделяем столбец «**r1**», нажимаем «**Копировать**», выделяем второй столбец «**r2**», нажимаем правую кнопку мыши, выбираем «**Специальная вставка**», в появившемся окне выбираем «**Вставить значения».**

Следующий столбец «t_i» заполняем формулами $t_i = a(-\ln(1-r))^{1/b}$ и сортируем его по возрастанию с помощью кнопки «**Сортировка**». Таким образом, мы получим выборку, соответствующую плану [*NUN*].

$r1$	$r1$	ti	$(t_i - m_t^*)^2$	$F^*_i(t)=F^*_{i-1}(t)+1/N$ эмпирич.	$F(t)$ – теоретич.	Di
0,337	0,000	63,7201	683402,29	0	0,001014	0,001014
0,329	0,013	186,3626	495670,96	0,005	0,014740	0,010740
0,006	0,018	212,8532	459071,93	0,01	0,020490	0,012490
0,495	0,019	215,2547	455823,31	0,015	0,021067	0,009067
0,556	0,941	1519,3916	395628,32	0,02	0,940304	0,003695
…	…	…	…	…	…	…
0,014	0,980	1730,8469	706348,18	0,98	0,979835	0,000164
0,273	0,983	1756,1145	749458,74	0,984	0,982540	0,001459
0,101	0,987	1807,9842	841957,84	0,988	0,987137	0,000862
0,599	0,995	1944,0687	1110214,26	0,992	0,9945896	0,002589
0,938	0,995	1961,0919	1146377,54	0,999	0,995177	0,000822
	$\sum$	222600,40	35663928,0		max=	0,027111

Для получения оценок числовых характеристик *методом моментов* для выборки, полученной по плану [*NUN*], заполним следующие столбцы формулами как в показано в таблице. Суммируем элементы третьего столбца для получения оценки математического ожидания и делим на N по формуле

$$m_t^* = T_0^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \ .$$

Для вычисления оценки дисперсии по формуле $D_t^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(t_i - m_t^*)^2$ заполняем четвертый столбец формулами $(t_i – m_t^*)^2$ и суммируем элементы этого столбца.

Находим оценки среднего квадратичного отклонения по формуле $\sigma_t^* = \sqrt{D_t^*}$.

Оценка коэффициента вариации $v_t^* = \frac{\sigma_t^*}{T_0^*}$.

Далее для получения оценок параметров закона распределения Вейбулла a^* и b^* используем значения коэффициентов гамма-функции. Так как

$$v^*_t = \gamma_3(b),$$

то $b^* = \gamma_3^{-1}(v_t^*)$.

Значение коэффициента $\gamma_3^{-1}(v_x^*)$ может быть рассчитано по приближённой формуле:

$$\gamma_3^{-1}(v) = 1 + \frac{v-1}{0.0526 - 1.03 \cdot v}$$ (при $1 \le b \le 4$погрешность ±0,56 %);

Найдя, таким образом, оценку b^* параметра формы, далее находим оценку a^* параметра положения

$$a^* = m_t^*/\gamma_1(b^*).$$

Значение коэффициента $\gamma_1(b^*)$ может быть рассчитано по приближённой формуле :

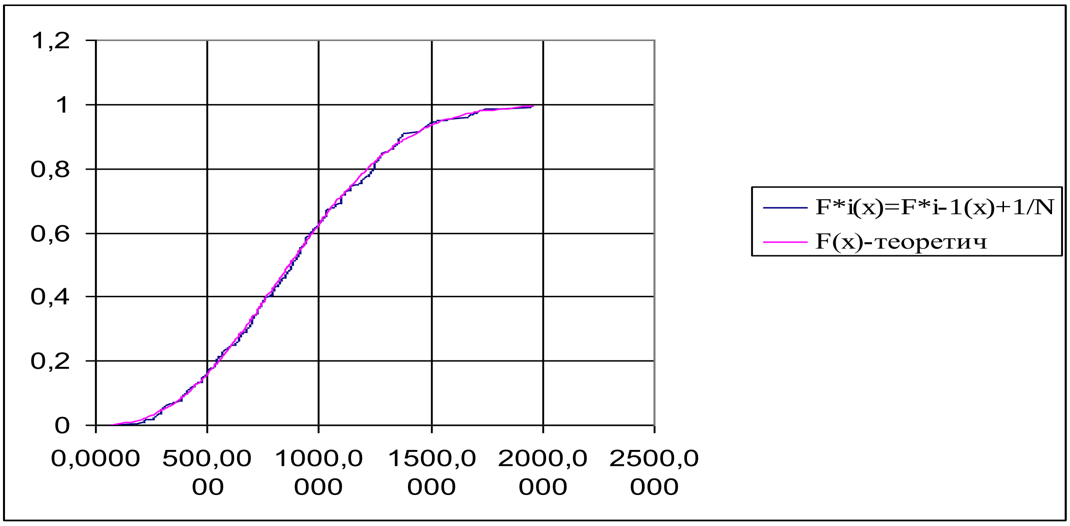
$\gamma_1(b) = 1 – 0{,}51/b + 0{,}61/b^2 – 0{,}1/b^3$ (при $1 \le b \le 4$ погрешность ±0,13 %).

Таким образом, получили оценки параметров распределения Вейбулла, соответствующие плану [*NUN*] при N=200 . В дальнейшем будем их обозначать с индексом 200, то есть: a^*_{200} и b^*_{200}, что бы отличать их от оценок, соответствующих усеченным выборкам. А также среднее время наработки на отказ, соответствующие плану [*NUN*] будем обозначать $T_0{}^*_{200}$.

Приступаем к построению *теоретической и эмпирической функции распределения.* Для этого в 5-ом столбце с помощью встроенной функции **Excel =ВЕЙБУЛЛ(),** расположенной в категории «**Статистические**» вычисляем значения теоретической функции распределения Вейбулла для найденных оценок параметров распределения a^*_{200} и b^*_{200} . Эта функция **Excel** имеет 4 аргумента: первый аргумент – это текущее значение t_i,, второй аргумент значение параметра b^*_{200} , третий – параметр a^*_{200}, четвертый аргумент – логический, будет равен ИСТИНА для функции распределения. В результате должна получиться формула вида =ВЕЙБУЛЛ(M2;B26;B25;ИСТИНА).

В соседнем столбце вычислим значения *эмпирической функции распределения.* Для этого в 1-ой ячейке этого столбца введем значение 0, во 2-ой ячейке этого столбца введем 1/*N*, в последующих ячейках этого столбца введем формулу, которая будет каждый раз прибавлять 1/*N* к предыдущему (вышестоящему) значению.

Для построения графиков теоретической и эмпирической функции распределения выделить столбцы «t_i», «$F^*_{\text{i}}(t)$ эмпирич.» и «$F(t)$ теоретич.» и выбрать тип диаграммы «Точечная» или «Диаграмма XY».



Проверяем закон распределения по критерию Колмагорова и для этого заполняем следующий столбец модулем разности соседних двух столбцов: $D_{\text{i}} = abs(F^*_i(t) - F(t))$. Находим максимальное значение в столбце

$$D_\lambda = \max_i \left| F^*(t_i) - F(t_i) \right| .$$

Если $D_\lambda \geq \frac{\lambda}{\sqrt{n}}$, то гипотеза о законе распределения должна быть отвергнута на уровне значимости $\alpha = P(\lambda)$, см. стр. 22.

Усеченные планы типа U получаются путем отбрасывания части результатов моделирования по плану [NUN]. Для этого копируем столбец «t_{i}» и удаляем из него 50 последних элементов для числа отказавших приборов r = 150 за время испытаний. Таким же образом поступаем и для r = 100, 50 и 20.

Таким образом, для плана [NUr] оставляются первые $n_1 = r$ наработок на отказ $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_r$, а остальные $n_2 = N - r$ усеченные наработки будут равны между собой и равны последнему значению наработки на отказ $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_{n2} = t_r$. Время испытаний T в этом случае случайно $T = t_r$.

Для получения оценок параметров распределения для плана [NUr] метод моментов использовать невозможно, поэтому воспользуемся *методом Максимального правдоподобия*, см. стр. 12 – 14.

$$1 + \frac{b^*}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \ln t_i - b^* \frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^{b^*} \ln t_i + \sum_{j=1}^{n_2} \tau_j^{b^*} \ln \tau_j}{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^{b^*} + \sum_{j=1}^{n_2} \tau_j^{b^*}} = 0 ,$$

$$a^* = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_1} t_i^{b^*} + \sum_{j=1}^{n_2} \tau_j^{b^*}}{n_1} \right)^{1/b^*} .$$

При *однократно усечённых планах* [NUT] и [NUr] в этих формулах все безотказные наработки имеют *одинаковую длительность* равную времени испытаний $T = t_r$ (последнему значению в столбце), поэтому

$$\sum_{j=1}^{n_2} \tau_j^{b^*} = n_2 T^{b^*}, \quad \sum_{j=1}^{n_2} \tau_j^{b^*} \ln \tau_j = n_2 T^{b^*} \ln T.$$

В таком случае эти формулы можно привести к виду

$$1 + \frac{b}{n_1} S_1 - b\left[(S_3 + n_2 T^b \ln T)/(S_2 + n_2 T^b) \right] = 0, \qquad (4.1)$$

$$a = [(S_2 + n_2 T^b)/n_1]^{1/b} , \qquad (4.2)$$

где $T = t_r$, $S_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \ln t_i$, $S_2 = \sum_{i=1}^{n_1} t_i^b$, $S_3 = \sum_{i=1}^{n_1} t_i^b \ln t_i$.

Необходимо отметить, что в этих формулах a – это оценка параметра положения, полученная при плане [NUr] и в дальнейшем, чтобы отличать ее от оценки, полученной при плане [NUN] будем обозначать ее a^*_r , во избежание путаницы. Аналогично, b – это оценка параметра формы, полученная при плане [NUr] и будем обозначать ее b^*_r.

При вычислении значений S_1, S_2, S_3 создадим столбцы «$ln(t_i)$», «t_i^b» и «$t_i^b \cdot ln(t_i)$» и вычислим их суммы с помощью «**Автосуммы**».

Для получения b^*_r из уравнения (4.1) воспользуемся встроенной опцией **Excel** «**Подбор параметра**». В отведенную для поиска b^*_r ячейку помещаем в качестве начального значения любое значение из допустимого диапазона ($0{,}5 \le b \le 5$). Далее в другую целевую ячейку заносим выражение (4.1) со ссылкой на начальное значение b^*_r. Выделив целевую ячейку с формулой (4.1), вызываем команду «**Сервис» - «Подбор параметра**», в появившемся диалоговом окне заполняем поля. В поле «**Установить в ячейке**» – адрес целевой ячейки, в поле «**Значение**» – 0, в поле «**Изменяя значение ячейки**» – адрес ячейки b^*_r. После нажатия кнопки «ОК» в изменяемой ячейке b^*_r должно появиться новое значение b^*_r , полученное из уравнения (4.1).

По формуле (4.2) находим a^*_r.

По найденным эмпирическим значениям a^*_r и b^*_r рассчитываем наработку на отказ $T_0{}^*{}_r = a^*{}_r \cdot \gamma_1(b^*{}_r)$.

План [NUr] при r =150

i	t_i	$ln\ t_i$	t_i^b	$t_i^b\ ln(t_i)$		
1	63,72	4,1545	26499,1	110090	$a^*_{r=150}$=	1014,36
2	186,4	5,2277	367996	1923771	$b^*_{r=150}$=	2,45153
3	212,9	5,3606	509740	2732512	Целевая ячейка	0,0000001
4	215,3	5,3718	523955	…		
5	230,1	5,4386	617077	…	$T_0{}^*{}_{r=150}$=	1018.45
6	256,4	5,5468	804716	…		
…	…	…	…	…		
149	1237	7,1204	3,8E+07	…		
150	1239	7,1219	3,8E+07	…		
151	1240	1307,5	2,8E+09	…		
151	1243	сумма				
153	1244					
…	….					

Аналогичные действия повторяем для всех значений r = 150, 100, 50 и 20.

Для оценки влияния длительности испытаний на погрешность результатов соберем в сводную таблицу все полученные значения наработок на отказ $T_0{}^*{}_{200}$ $T_0{}^*{}_{r=150}$ $T_0{}^*{}_{r=100}$ $T_0{}^*{}_{r=50}$ $T_0{}^*{}_{r=20,}$ а также длительность испытаний в каждом случае.

Наработка на отказ		Длительность испытаний		Относительная погрешность $\delta = \lvert T_0{}^*{}_r - T_0{}^*{}_{200}\rvert / T_0{}^*{}_{200}$	Относительное время испытаний $\theta = t_r / t_{max}$
$T_0{}^*{}_{200}$	1700	t_{max}	3649	0	1
$T_0{}^*{}_{r=150}$	1800	$t_{r=150}$	2010	0.004	0.58
$T_0{}^*{}_{r=100}$	1870	$t_{r=100}$	1488	0.02	0.41
$T_0{}^*{}_{r=50}$	1806	$t_{r.=50}$	1028	0.03	0.32
$T_0{}^*{}_{r=20}$	*1890*	$t_{r.=20}$	598	0.16	0.21

По результатам последней таблицы построим график «Зависимость относительной погрешности наработки на отказ от относительного времени испытаний».

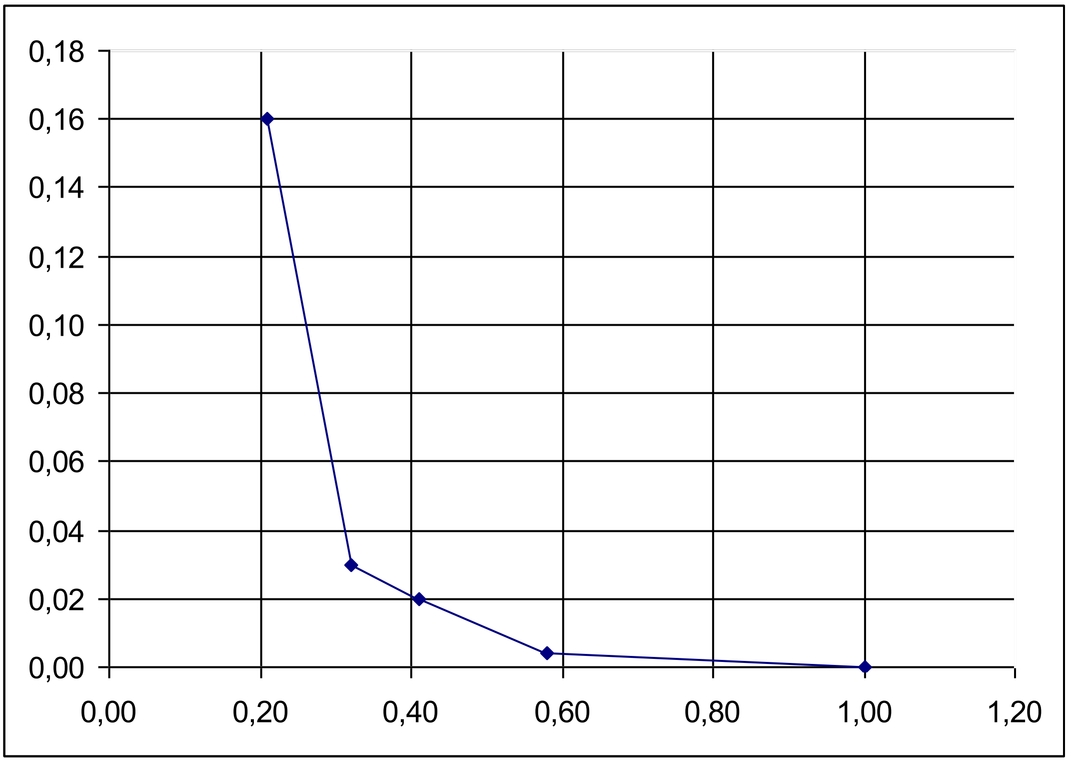


Рис. 3. «Зависимость относительной погрешности наработки на отказ от относительного времени испытаний»

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Вентцель, Е.С. Теория вероятностей. М. : Высшая школа, 2000. – 577 с.
2 Линденбаум, М.Д. Математические модели в расчётах на ЭВМ, ч. 4. Метод статистических испытаний (Монте-Карло). Учеб. пособие, РИИЖТ, 1993.Утверждено НМС ГУКУЗ МПС РФ.
3 Надежность технических систем : справочник / под ред. И.А. Ушакова. М. : Радио и связь, 1985. – 606 с.

Приложение

Таблица 1

Коэффициенты закона распределения Вейбулла

$F(x) = 1 - \exp((x/a)^b)$; a – параметр положения; b – параметр формы;

$M(x) = a \cdot \gamma_1(b)$ – математическое ожидание;

$\sigma(x) = a \cdot \gamma_2(b)$ – среднее квадратическое отклонение;

$v(x) = \sigma(x)/M(x) = \gamma_3(b)$ – коэффициент вариации

b	$\gamma_1(b)$	$\gamma_2(b)$	$\gamma_3(b)$	b	$\gamma_1(b)$	$\gamma_2(b)$	$\gamma_3(b)$
0,50	2,0000	4,4721	2,2361	1,85	0,8882	0,4981	0,5608
0,55	1,7024	3,3453	1,9650	1,90	0,8874	0,4858	0,5474
0,60	1,5046	2,6451	1,7581	1,95	0,8867	0,4742	0,5348
0,65	1,3663	2,1789	1,5948	2,00	0,8862	0,4632	0,5227
0,70	1,2658	1,8512	1,4624	2,05	0,8859	0,4529	0,5112
0,75	1,1906	1,6108	1,3529	2,10	0,8857	0,4431	0,5003
0,80	1,1330	1,4282	1,2605	2,15	0,8856	0,4338	0,4898
0,85	1,0880	1,2854	1,1815	2,20	0,8856	0,4250	0,4798
0,90	1,0522	1,1711	1,1130	2,25	0,8857	0,4165	0,4703
0,95	1,0234	1,0777	1,0531	2,30	0,8859	0,4085	0,4611
1,00	1,0000	1,0000	1,0000	2,35	0,8862	0,4008	0,4523
1,05	0,9808	0,9344	0,9527	2,40	0,8865	0,3934	0,4438
1,10	0,9649	0,8783	0,9102	2,45	0,8868	0,3864	0,4357
1,15	0,9517	0,8297	0,8718	2,50	0,8873	0,3797	0,4279
1,20	0,9407	0,7872	0,8369	2,55	0,8877	0,3732	0,4204
1,25	0,9314	0,7498	0,8050	2,60	0,8882	0,3670	0,4131
1,30	0,9236	0,7164	0,7757	2,65	0,8887	0,3610	0,4061
1,35	0,9170	0,6866	0,7487	2,70	0,8893	0,3552	0,3994
1,40	0,9114	0,6597	0,7238	2,75	0,8899	0,3497	0,3929
1,45	0,9067	0,6352	0,7006	2,80	0,8904	0,3443	0,3866
1,50	0,9027	0,6129	0,6790	2,85	0,8911	0,3391	0,3805
1,55	0,8994	0,5925	0,6588	2,90	0,8917	0,3341	0,3746
1,60	0,8966	0,5737	0,6399	2,95	0,8923	0,3292	0,3689
1,65	0,8942	0,5564	0,6222	3,00	0,8930	0,3245	0,3634
1,70	0,8922	0,5402	0,6055	3,05	0,8936	0,3200	0,3581
1,75	0,8906	0,5252	0,5897	3,10	0,8943	0,3156	0,3529
1,80	0,8893	0,5112	0,5749	3,15	0,8950	0,3113	0,3479
1,85	0,8882	0,4981	0,5608	3,20	0,8957	0,3072	0,3430

Приближённые формулы $(1 \le b \le 4)$

$b = \gamma_3^{-1}(v) = 1 + \dfrac{v - 1}{0.0526 - 1.03 \cdot v}$ (погрешность ±0,56%);

$\gamma_1(b) = 1 - 0{,}51/b + 0{,}61/b^2 - 0{,}1/b^3$ (погрешность ±0,13%).

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Линденбаум Михаил Давидович
Ведерникова Ольга Геннадьевна

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ НА НАДЕЖНОСТЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Печатается в авторской редакции
Технический редактор Т.М. Чеснокова

Подписано в печать 05.10.17. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,32.
Тираж экз. Изд. № 90378. Заказ .

Редакционно-издательский центр ФГБОУ ВО РГУПС.

Адрес университета: 344038, г. Ростов н/Д, пл. Ростовского Стрелкового Полка Народного Ополчения, д. 2.