РОСЖЕЛДОР
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Ростовский государственный университет путей сообщения»
(ФГБОУ ВПО РГУПС)
Тихорецкий техникум железнодорожного транспорта
(ТТЖТ - филиал РГУПС)

Моисеева С.А.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ РАЗДЕЛА «ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА» ПО ДИСЦИПЛИНЕ МАТЕМАТИКА

специальностей

23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных машин и оборудования (по отраслям);
22.02.06. Сварочное производство;
13.02.07. Электроснабжение (по отраслям);
23.02.06. Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог (электровозы, тепловозы, вагоны);
23.02.01. Организация перевозок и управление на транспорте (по видам);
27.02.03. Автоматика и телемеханика на транспорте (на железнодорожном транспорте);
08.02.10. Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство;
11.02.06. Техническая эксплуатация транспортного радиоэлектронного оборудования (по видам транспорта);
09.02.01. Компьютерные системы и комплексы.
08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений.

2015

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по учебной работе:
« 01 » 09 2015г.

Н.Ю. Шитикова

Методические рекомендации для подготовки к практическим занятиям раздела «Основы математического анализа» по дисциплине Математика студентами специальностей:

23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных машин и оборудования (по отраслям);
22.02.06. Сварочное производство;
13.02.07. Электроснабжение (по отраслям);
23.02.06. Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог (электровозы, тепловозы, вагоны);
23.02.01. Организация перевозок и управление на транспорте (по видам);
27.02.03. Автоматика и телемеханика на транспорте (на железнодорожном транспорте);
08.02.10. Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство;
11.02.06. Техническая эксплуатация транспортного радиоэлектронного оборудования (по видам транспорта);
09.02.01. Компьютерные системы и комплексы.
08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений.

Данная методическая разработка содержит примеры и задачи по теории пределов, дифференциальному и интегральному исчислению, дифференциальным уравнения и рядам.

Каждая глава содержит информационный материал рекомендательного характера, типовые задачи с иллюстрациями и решениями, что позволит студентам самостоятельно подготовиться к выполнению практических заданий и тестированию.

Организация-разработчик: Тихорецкий техникум железнодорожного транспорта – филиал Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Ростовский государственный университет путей сообщения» (ТТЖТ – филиал РГУПС)

Разработчик:
Моисеева С.А., преподаватель ТТЖТ – филиала РГУПС

Рецензенты:
Максимова Л.В., преподаватель ТТЖТ – филиала РГУПС
Павлова Э.П., преподаватель ГОУ СПО «Тихорецкий индустриальный техникум»

Рекомендована цикловой комиссией № 3 «Математические и общие естественнонаучные дисциплины».
Протокол заседания № 1 от « 01 » сентября 2015 г.

Содержание.

ВВЕДЕНИЕ

Пособие составлено для студентов второго курса специальностей
23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных машин и оборудования (по отраслям);
22.02.06. Сварочное производство;
13.02.07. Электроснабжение (по отраслям);
23.02.06. Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог (электровозы, тепловозы, вагоны);
23.02.01. Организация перевозок и управление на транспорте (по видам);
27.02.03. Автоматика и телемеханика на транспорте (на железнодорожном транспорте);
08.02.10. Строительство железных дорог, путь и путевое хозяйство;
11.02.06. Техническая эксплуатация транспортного радиоэлектронного оборудования (по видам транспорта);
09.02.01. Компьютерные системы и комплексы.
08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений.
состоит из методических разработок шести тем. В каждой приводятся основные понятия и определения, разбираются типовые задачи, даются задачи для самостоятельного решения. предлагается задание для подготовки к тестированию. Используя пособие, студенты имеют возможность изучить предлагаемые темы самостоятельно.

Переход среднего профессионального образования России на уровневую систему предполагает использование компетентностного подхода в процессе обучения студентов, когда системно формируются знание, умение, навыки (ЗУН) обучающихся, а также их личностные качества, позволяющие компетентно использовать ЗУН в производственной деятельности, быть конкурентоспособным специалистом.

Большую роль в процессе формирования профессиональных компетенций играют математические компетенции и, в частности, технологии их формирования. Несмотря на то, что студенты в условиях лимитированного времени вынуждены изучать достаточно объёмный новый теоретический материал по математике, должны одновременно быть созданы необходимые условия для решения практических задач, в процессе чего наиболее продуктивно развиваются умения, формируются навыки и также такие личностные качества, как целеустремленность, ответственность, работоспособность, самостоятельность и т.п.

Учебной программой предусмотрен периодический контроль усвоения математических знаний, формирования необходимых умений и навыков в виде тематических контрольных работ. Их проведению должно предшествовать, наряду с практическими занятиями, самостоятельная работа студентов, включающая элементы изучения и закрепления теоретического материала, самопроверки и самоконтроля.

В данном пособии обозначена конечная цель – выполнения тестовой работы по данному разделу курса математики, а всё остальное – как методика подготовки к её выполнению, включая:

1) необходимый теоретический материал, изложенный как справочный материал;
2) необходимые умения, как инструмент решения математических задач;
3) необходимый объём заданий для самостоятельного выполнения, обеспечивающий формирование соответствующих навыков;
4) образцы выполнения типовых заданий;
5) условия для самоконтроля – ответы к заданиям для самостоятельного решения.

Методика строится таким образом, чтобы ответить на вопрос: как студент, получивший примерный вариант предстоящей проверочной тестовой работы, должен продумать, организовать свою самоподготовку, чтобы успешно справиться с выполнением заданий? В своём представлении технологии самоподготовки ориентируемся на студентов с уровнем первичных знаний «ниже среднего»; более подготовленные студенты могут использовать другие, наиболее оптимальные по содержанию промежуточные выкладки.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НА НЕПРЕРЫВНОСТЬ. НАХОЖДЕНИЕ АСИМПТОТ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ.

Вопросы для самоподготовки

1. Функция, ее область определения и множество значений.
2. Четность, периодичность, монотонность, ограниченность функции.
3. Свойства и графики элементарных функций.
4. Предел функции. Основные теоремы о пределах функции.
5. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.
6. Асимптоты графиков функций.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Название «математический анализ» - сокращенное видоизменение названия «анализ бесконечно малых». Последнее больше говорит, но оно тоже сокращенное. Название «анализ посредством бесконечно малых» характеризовало бы предмет более точно.

Было бы лучше, если название отражало те объекты, которые подвергаются анализу (изучению). В классическом математическом анализе такими объектами являются прежде всего функции, т.е. переменные величины, зависящие от других переменных величин. Функции мы всюду встречаем на практике, функции описывают движения, физические явления. Они встречаются в технике, геометрии, механике, химии, экономике. Изучая функции, мы изучаем конкретные явления, которые они описывают. Одна и та же функция может описывать явления совершенно различной природы и тем самым объединять закономерности, которым эти явления подчиняются.

Математический анализ – средство изучения функций, но тогда и средство изучения окружающих нас явлений. Важными понятиями математического анализа являются предел и непрерывность функции, производная и интеграл. В этой теме получим начальные сведения о функциях.

Пусть даны два непустые множества X и Y. Закон, ставящий в соответствие каждому элементу $x \in X$ один и только один элемент $y \in Y$, называется *функцией, определенной на множестве X со значениями в множестве Y.* При этом множество X называется *областью определения функции* и обозначается D, а множество всех значений у, для которых существует хотя бы одно x из X, такое, что $y = f(x)$, называется *множеством значений функции* и обозначается E.

Функция называется *четной*, если для всех x из D выполняется равенство

$f(-x) = f(x)$,

и *нечетной,* если выполняется равенство

$f(-x) = -f(x)$.

Функция называется *периодической*, если существует такое число $T \neq 0$, что для всех x из D выполняется равенство

$f\,(x \pm T) = f\,(x)$.

Функция называется *возрастающей в интервале (а, в),* если для любых двух x_1 и x_2 из D, принадлежащих этому промежутку, таких, что x_1 и x_2, выполняется неравенство

$f\,(x_1) < f\,(x_2)$,

и *убывающей,* если для этих же x_1 и x_2 из D выполняется неравенство

$f\,(x_1) > f\,(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной*, если существуют такие числа m є R и $M \, є R$, что для любого x из D выполняется неравенство

$m < f\,(x) < M$.

Число А называют *пределом функции $f\,(x)$* в точке a (или при x, стремящемся к a), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность (окрестностью точки a называется любой промежуток, содержащий точку a внутри себя) точки a, такая, что в каждой точке этой окрестности, за исключением, быть может, самой точки a, функция $f(x)$ определена и удовлетворяет неравенству

$|\,f\,(x) - A\,| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$

Число A называется *правым (левым) пределом функции $f\,(x)$ в точке а,* если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$a < x < a + \delta \qquad (a - \delta < x < a)$,

выполняется неравенство

$|\,f\,(x) - A\,| < \varepsilon$.

Правый и левый пределы функции записываются соответственно как

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$.

Функция $f\,(x)$ называется *бесконечно малой при $x \to a$*, если

$\lim\limits_{x \to a} = 0$

Функция называется *бесконечно большой при $x \to a$*, если для любого числа $M > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих условию

$|\,x - a\,| < \delta$,

выполняется условие

$|\,f\,(x)\,| > M$.

Данный факт записывается следующим образом: $\lim\limits_{x \to a} = \infty$

Если в некоторой окрестности точки a, за исключением, возможно, самой этой точки, определены функции $f\,(x)$ и $g\,(x)$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то справедливы соотношения:

1) $\lim\limits_{x \to a} c = c$;

2) $\lim\limits_{x \to a}\bigl(f(x) \pm g(x)\bigr) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$,если $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x)$ (следует из соотношения 3).

Приведем замечательные пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\approx 2{,}71828$

Функция $f\ (x\ )$ называется *непрерывной в точке* $x_o \in X$, если $f\ (x\ )$ задана в некоторой окрестности точки x_o, существует предел этой функции при $x\to x_0$ и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству

$|\, x - x_0\,| < \delta$,

выполняется условие

$|\ f\ (x\ ) - f\ (x_0\ )\ | < \varepsilon$.

Функция называется *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва*. Функция имеет разрыв в точке x_0, если нарушается хотя бы одно из следующих требований:

1) существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=B$;

2) пределы A и B конечны;

3) $A = B = f\ (x_0\ )$.

Точку разрыва называют *точкой разрыва первого рода*, если левый и правый пределы функции в данной точке конечны, и *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из этих пределов не существует либо равен бесконечности.

Если кривая какой-либо своей частью неограниченно удаляется от начала координат, то эта часть (бесконечная ветвь кривой) может иметь *асимптоту* – прямую, к которой ветвь кривой неограниченно приближается. Различают вертикальные и наклонные асимптоты.

Вертикальной асимптотой называют прямую $x = a$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ равен $\pm\infty$

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой кривой* $y = f\ (x\ )$ при $x\to +\infty$ $(-\infty)$, если

$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx-b\big)=0$ $\Big(\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-kx-b\big)=0\Big)$.

Коэффициенты k и b в уравнении асимптоты определяются следующими соотношениями:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\ b = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)$$

$$\left(k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\ \ b = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-kx\big)\right).$$

Рассмотрим частный случай наклонной асимптоты, когда коэффициент $k = 0$. Уравнение асимптоты тогда принимает вид $y = b$, и такую асимптоту называют *горизонтальной.*

Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Производная обозначается y', y'_x, $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$. Таким образом,

$$y' = y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим *геометрический смысл производной*. Пусть дана некоторая функция $f(x)$. Значение производной этой функции в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции через точку $M(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$:

$$f'(x_0) = k.$$

Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$, в общем виде записывается следующим образом:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Физический смысл производной заключается в следующем: пусть зависимость пути, пройденного материальной точкой, описывается функцией $s = f(t)$. Производная этой функции в точке t_0 равна значению мгновенной скорости движения материальной точки в данный момент времени:

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

Перечислим *правила дифференцирования*:

1) $C' = 0$;

2) $(u \pm v)' = u' + v'$;

3) $(uv)' = u'v + v'u$;

4) $(Cf)' = Cf'$;

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Производная сложной функции вида $y = f(g(x))$ равна

$$y' = f'(g(x))g'(x).$$

Приведем *таблицу производных основных элементарных функций*:

1) $(kx+b)' = k$; 2) $(x^n)' = nx^{n-1}$; 3) $(x^2)' = 2x$;

4) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 5) $\sin' x = \cos x$; 6) $\cos' x = -\sin x$;

7) $tg' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 8) $ctg' x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$; 9) $(a^x)' = a^x \ln a$;

10) $(e^x)' = e^x$; 11) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; 12) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; 16) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Произвольное приращение независимой переменной x называется *дифференциалом независимой переменной* и обозначается через Δx или dx ($\Delta x = dx$).

2. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x является произведение ее производной $f'(x)$ на дифференциал dx аргумента x.

3. Согласно определению дифференциала функции имеем:
$dy = f'(x)$, или $dy = y' \cdot dx$, или $df(x) = f'(x)dx$.

4. Отсюда следует: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, или $y' = \dfrac{dy}{dx}$, или $f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$,
т.е. производную от функции $y = f(x)$ можно представить как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30}$; в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{tg5x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x}$.

Решение. а) При $x \to \infty$ имеем неопределенность вида ∞/∞. Чтобы избавиться от нее, делим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-5/x+6/x^2}{5-5/x-30/x^2} = \frac{1-0+0}{5-0-0} = 0{,}2;$$

б) При x=1 значения числителя и знаменателя дроби конечны, причем знаменатель не равен нулю. Следовательно, данная функция непрерывна в точке x=1. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30} = \frac{1-5+6}{5-5-30} = \frac{2}{-30} = -\frac{1}{15};$$

в) Так как при x=3 имеем неопределенность вида $0/0$, то для вычисления предела разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$x^2-5x+6=0$,

$D=25-4\cdot6=1$, $x_1=\dfrac{5+1}{2}=3$, $x_2=\dfrac{5-1}{2}=2$,

$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$,

$5x^2-5x-30=0$,

$D=25+4\cdot5\cdot25=625$, $x_1=\dfrac{5+25}{2\cdot5}=3$, $x_2=\dfrac{5-25}{2\cdot5}=-25$,

$5x^2-5x-30=5(x-3)(x+2)$.

Тогда

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{5x^2-5x-30}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-2)}{5(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)}{5(x+2)}=\frac{3-2}{5(3+2)}=\frac{1}{25}=0{,}04;$$

г) При x=2 имеем неопределенность вида $0/0$. Для того чтобы избавиться от нее, домножим числитель и знаменатель дроби на сопряженные им выражения:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x+2}^{\,2}-2^2\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}^{\,2}-\sqrt{2}^{\,2}\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+2}+2}=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

д) Воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{tg5x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cos5x\frac{1}{5}\frac{5x}{\sin5x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to0}\cos5x\cdot\frac{1}{5}\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sin5x}}=1\cdot1\cdot\frac{1}{5}\cdot1=\frac{1}{5}=0{,}2$$

е) Воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{3/x}=\lim_{x\to0}(1+2x)^{6/(2x)}=\lim_{2x\to0}\left((1+2x)^{1/2x}\right)^6=e^6.$$

2. Найдите асимптоты кривой $y=2x+\dfrac{1}{x}$.

Решение. Очевидно, что прямая x=0 является вертикальной асимптотой, так как

$$\lim_{x\to0-0}\left(2x+\frac{1}{x}\right)=-\infty,\quad \lim_{x\to0+0}\left(2x+\frac{1}{x}\right)=+\infty.$$

Выясним, имеет ли данная функция наклонные и горизонтальные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to0\pm0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0\pm0}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)=2,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2x+\frac{1}{x}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Следовательно, кривая имеет наклонную асимптоту $y=2x$ при $x\to\pm\infty$.

3. Найдите производные функций:

а) $y=5x^2\sin x$; б) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; в) $y=\sin^2\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Решение. Вычислим производные заданных функций:

а) $y' = (5x^2 \sin x)' = (5x^2)' \sin x + (\sin x)' 5x^2 =$

$= 10x \sin x + 5x^2 \cos x = 5x(2\sin x + x\cos x)$.

б) $y' = \left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{(\ln x)'\sqrt{x} - (\sqrt{x})' \ln x}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \dfrac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$;

в)

$$y' = \left(\sin^2\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)' = 2\sin\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sin\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)' = 2\sin\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cos\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$$

$$= \sin\left(2\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\left(1 + (x^{-1/2})'\right) = \sin\left(2\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^{-3/2}\right).$$

4. Исследовать функцию $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$ методами дифференциального исчисления и постройте ее график.

Решение. Проведем исследование функции в соответствии с общей схемой.

1. Область определения $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

2. Функция имеет разрыв в точке x=0:

$$\lim_{x \to 0-0}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0+0}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) = -\infty.$$

Имеем точку разрыва 2-го рода. Прямая x=0 – вертикальная асимптота графика функции.

3. Найдем значения x, при которых y=0:

$$x^2 - \frac{1}{x} = 0, \quad x^3 = 1, \quad x = 1.$$

График функции пересекает координатные оси в единственной точке (1; 0).

Определим интервалы знакопостоянства функции:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
y	+	Не существует	-	0	+

4. Функция не является ни четной, ни нечетной. Она непериодическая.

5. Найдем точки, для которых $y' = 0$.

$$y' = \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)' = 2x + \frac{1}{x^2} = 0, \text{ отсюда } 2x^3 = -1, \quad x = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0{,}794.$$

6. Определим интервалы возрастания и убывания функции:

x	$(-\infty, -1/\sqrt[3]{2})$	$-1/\sqrt[3]{2}$	$(-1/\sqrt[3]{2}, 0)$	0	$(0, \infty)$
y'	–	0	+	Не существует	+
y	$\searrow$	$1/\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	Не существует	$\nearrow$

Определим точки экстремума:

$$y\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2-1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\approx 0{,}794,$$

т.е. получили точку минимума.

7. Найдем критические точки 2-го рода:

$$y''=\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)'=2-2\frac{1}{x^3}=2\left(1-\frac{1}{x^3}\right)=0, \text{ отсюда } \frac{1}{x^3}=1, \quad x=1.$$

8. Определим интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,0)$
y''	+	Не существует	–	0	+
y	Выпуклость вниз	Не существует	Выпуклость вверх	0	Выпуклость вниз

Таким образом, точка x=1 является точкой перегиба.

9. Найдем наклонные асимптоты (если они существуют):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{1}{x^2}\right)=\infty.$$

Так как предел не равен конечному числу, горизонтальные и наклонные асимптоты отсутствуют.

10. На основании проведенного анализа поведения функции построим ее график

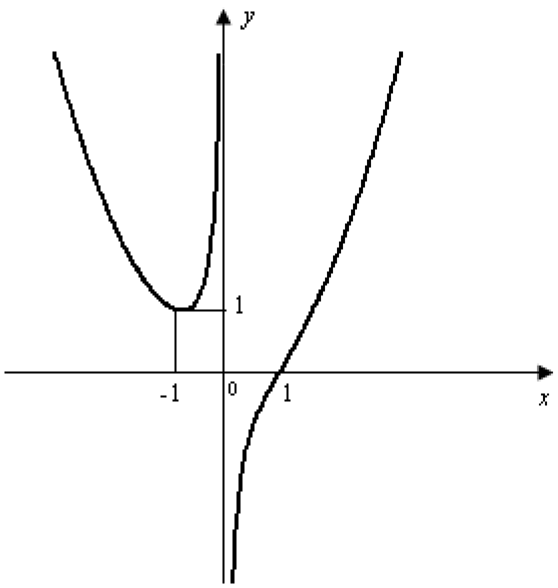


График функции $y=x^2-\frac{1}{x}$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2+15x-140}{x^2+5x-36}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x^2+15x-140}{x^2+5x-36}$;

в) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2+15x-140}{x^2+5x-36}$;

г) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

2. Найти производные функций:

а) $y=5x^2-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\sin x$;

б) $y=2^x\cos x$;

в) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;

г) $y=\ln\sin 5x$.

3. Исследовать функцию методами дифференциального исчисления и построить ее график. При исследовании следует найти ее интервалы возрастания и убывания и точки экстремума, интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции

$y=x^3+6x^2+9x+1$.

Ответы

1.а) $\dfrac{35}{9}$; б) $\dfrac{55}{13}$; в) 5; г) e^2; д) $\dfrac{1}{3}$. **2.** а) $10x+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+\cos x$; б) $2^x(\ln 2\cos x-\sin x)$; в) $-\dfrac{1}{1+\sin x}$; г) $5ctg5x$. **3**. 1) ООФ: $x\in R$; 2) точек разрыва нет; 3) асимптот нет; 4) функция ни четная ни нечетная, непериодическая; 5) минимум $y=-3$ в точке $x=-1$, максимум $y=1$ в точке $x=-3$; 6) на интервалах $(-\infty;-3)$, $(-1;+\infty)$ функция возрастает, на интервале $(-3;-1)$ функция убывает; 7) на интервале $(-\infty;-2)$ функция выпукла вверх, на интервале $(-2;+\infty)$ - выпукла вниз.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА.

Вопросы для самоподготовки

1. Неопределенный интеграл, его основные свойства.
2. Правила и формулы интегрирования.
3. Методы интегрирования (непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям).
4. Определенный интеграл, его геометрический и физический смысл.
5. Формула Ньютона – Лейбница.
6. Свойства и методы вычисления определенного интеграла.
7. Криволинейная трапеция. Вычисление площади криволинейной трапеции.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Функция $F(x)$, определенная на некотором множестве D, называется *первообразной для функции* $f(x)$, определенном на том же множестве, если функция $F(x)$ дифференцируема для любых $x \in D$, причем

$$F'(x) = f(x).$$

Можно показать, что если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором множестве D, то и функция $F(x)+C$, где C - константа, также будет первообразной для функции $f(x)$ на этом же множестве. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенной на множестве D, называется *неопределенным интегралом от функции* $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Перечислим свойства неопределенного интеграла.

1. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал – подынтегральному выражению*:

$$(\int f(x)dx)' = f(x), \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

2. *Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и произвольной константы*:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла*:

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где $k = const \neq 0$.

4. *Неопределенный интеграл от суммы (разности) двух непрерывных функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций*:

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Приведем *таблицу неопределенных интегралов*:

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$;

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

5) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

6) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

8) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;

10) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$;

11) $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$;

12) $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$.

Существует ряд методов интегрирования функций. Под *непосредственным интегрированием* понимают метод, при котором с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и использовании свойств 3, 4 неопределенного интеграла удается свести искомый интеграл к одному или нескольким табличным интегралам. Непосредственное интегрирование возможно далеко не всегда, поэтому нередко приходится использовать и другие методы.

Метод подстановки заключается в том, что путем замены переменной $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ получают интеграл вида

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt .$$

При этом стремятся подобрать такую замену переменной, чтобы полученный интеграл был более простым (например, вычислялся непосредственным интегрированием).

Еще одним методом интегрирования является *интегрирование функции по частям*, которое производится по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu .$$

При вычислении интегралов методом интегрирования по частям главным является разумное разбиение подынтегрального выражения на множители u и dv .Общих установок по этому вопросу не имеется. Необходимо только соблюдать требование, чтобы dx обязательно входило в состав dv и чтобы через dv была обозначена функция, интеграл которой можно легко найти. Для некоторых типов интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям, рекомендуются следующие обозначения.

1. В интегралах вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \quad \int P(x)\sin axdx, \quad \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$- многочлен относительно x, a - некоторое число, полагают $u = P(x)dx$, а все остальные сомножители за dv.

2. В интегралах вида
$\int P(x)\ln|ax|dx$, $\int P(x)\arcsin axdx$,
$\int P(x)\arccos axdx$, $\int P(x)arctgaxdx$,
$\int P(x)arcctgaxdx$
полагают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители – за u.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на *n* частей точками $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ так, чтобы

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Обозначим длину отрезка $[x_{k-1}; x_k]$ как $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. На каждом из таких отрезков выберем произвольным образом точку ξ_k и рассмотрим сумму

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Последнее выражение называют *интегральной суммой*. Если существует не зависящий от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на части и выбора точек ξ_k предел интегральной суммы при $\Delta x \to 0$ (где $\Delta x = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n\}$), то его называют *определенным интегралом от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ и обозначают

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Рассмотрим геометрический и физический смысл определенного интеграла. Будем называть *криволинейной трапецией* фигуру, ограниченную графиком функции $y = f(x)$,
прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox (рис.1). Площадь криволинейной трапеции вычисляется как значение определенного интеграла от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, т.е.

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

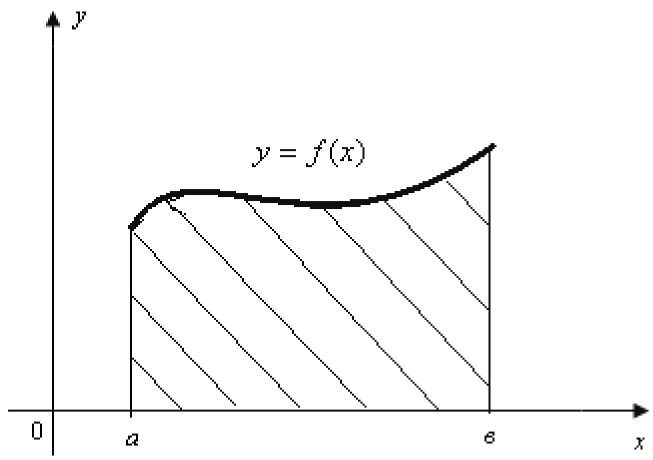


Рис.1 Криволинейная трапеция

Определенный интеграл может быть использован при решении ряда физических задач. Например, путь, пройденный телом за промежуток времени $[t_1; t_2]$

при скорости, изменяющейся с течением времени по закону $v = v(t)$, определится как

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt .$$

Для вычисления определенных интегралов используется *формула Ньютона – Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(a)$ и $F(b)$ - значения любой из первообразных $F(x)+C$ при $x=a$ и при $x=b$ соответственно.

Перечислим *свойства определенного интеграла*.

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, *где* $k = const$.
3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, *где* $a < c < b$.
5. *Если* $f(x) \ge 0$ *для всех* $x \in [a,b]$ и $a < b$, *то* $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.
6. *Если* $f(x) \ge g(x)$ *для всех* $x \in [a,b]$, *то* $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.
7. *Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ и $a < b$, *то*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

8. *Для непрерывной на отрезке* $[a;b]$ *функции* $f(x)$ *существует такая точка* $c \in [a,b]$, *что*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Методы вычисления определенных интегралов аналогичны соответствующим методам для неопределенных интегралов, за исключением метода подстановки. При вычислении интеграла с помощью подстановки $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ пределы интегрирования *a* и *b*, соответствующие изменению переменной *x*, должны быть заменены на числа α и β, соответствующие изменению переменной *t*. Значения α и β выражаются из соотношений $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. С учетом этого получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Вычислите неопределенные интегралы:

а) $\int\left(x^3+\sqrt{2x+5}+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$; б) $\int\dfrac{x^3+0{,}25}{x(x^3+1)}dx$; в) $\int x\sin x dx$.

Решение. а) Воспользуемся методом непосредственного интегрирования:

$$\int\left(x^3+\sqrt{2x+5}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int x^3dx+\int\sqrt{2x+5}dx+\int\frac{1}{x^2}dx = \int x^3dx+\int(2x+5)^{1/2}dx+\int x^{-2}dx =$$

$$= \frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\frac{(2x+5)^{3/2}}{1{,}5}-x^{-1}+C = \frac{x^4}{4}+\frac{(2x+5)^{3/2}}{3}-\frac{1}{x}+C;$$

б) Произведем замену $x(x^3+1)=x^4+x=t$. Тогда $dt=(4x^3+1)dx=4(x^3+0{,}25)dx$ и

$$\int\frac{x^3+0{,}25}{x(x^3+1)}dx = \frac{1}{4}\int\frac{4(x^3+0{,}25)}{x(x^3+1)}dx = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t|+C = \frac{1}{4}\ln\left|x^4+x\right|+C;$$

в) Воспользуемся методом интегрирования по частям. Для этого введем следующие обозначения:

$$u=x,\quad du=dx,\quad dv=\sin x dx,\quad v=\int\sin x dx=-\cos x\,.$$

Согласно формуле интегрирования по частям, получим:

$$\int x\sin x dx = -x\cos x-\int(-\cos x)dx = -x\cos x+\int\cos x dx = -x\cos x+\sin x+C\,.$$

2. Вычислите неопределенный интеграл $\int\sin^4 x dx$. Полученный интеграл проверьте дифференцированием.

Решение. После преобразования подынтегральной функции с использованием тригонометрических формул применим метод непосредственного интегрирования:

$$\int\sin^4 x dx = \int(\sin^2 x)^2dx = \int\frac{(1-\cos 2x)^2}{2^2}dx = \frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx-\frac{2}{4}\int\cos 2x dx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x dx = \frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x dx+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x dx+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 4x dx = \frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{8}+\frac{1}{32}\sin 4x+C =$$

$$= \frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C\,.$$

Проверим полученный результат дифференцированием:

$$\left(\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C\right)' = \frac{3}{8}-\frac{1}{4}\cdot 2\cos 2x+\frac{4}{32}\cos 4x = \frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1}{8}(\cos^2 2x-\sin^2 2x) =$$

$$= \frac{3}{8}-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1}{8}(2\cos^2 2x-1) = \frac{1}{8}(2\cos^2 2x-4\cos 2x+2) = \frac{1}{4}(2\cos^2 2x-2\cos 2x+1) =$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 2x-1)^2 = \frac{1}{4}(\cos^2 x-\sin^2 x-1)^2 = \frac{1}{4}(-2\sin^2 x)^2 = \frac{1}{4}\cdot 4\sin^4 x = \sin^4 x.$$

3. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int_1^4 (x^2 + 2\sqrt{x})dx$; б) $\int_4^8 \frac{x+3}{x^2+6x}dx$; в) $\int_1^e \ln x dx$.

Решение. а) Применим метод непосредственного интегрирования:

$$\int_1^4 (x^2 + 2\sqrt{x})dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} + 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 4^{3/2}\right) - \left(\frac{1^3}{3} + 2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1^{3/2}\right) = \frac{64}{3} + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = \frac{67}{3};$$

б) Воспользуемся методом подстановки: $x^2 + 6x = t$, $(2x+6)dx = dt$.

Найдем пределы интегрирования для переменной t:

$$x = 4: \quad t = 4^2 + 6\cdot 4 = 40,$$
$$x = 8: \quad t = 8^2 + 6\cdot 8 = 112.$$

Тогда имеем:

$$\int_4^8 \frac{x+3}{x^2+6x}dx = \frac{1}{2}\int_4^8 \frac{(2x+6)}{x^2+6x}dx = \frac{1}{2}\int_{40}^{112}\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t\Big|_{40}^{112} = \frac{1}{2}(\ln 112 - \ln 40) = \frac{1}{2}\ln\frac{112}{40} = \frac{1}{2}\ln 2{,}8;$$

в) Для вычисления данного интеграла используем метод интегрирования по частям:

$$u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad dv = dx, \quad v = x.$$

Далее применим формулу $\int u dv = uv - \int v du$, получаем:

$$\int_1^e \ln x dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = x\ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e = (e\ln e - 1\cdot\ln 1) - (e-1) = e - 0 - e + 1 = 1.$$

4. Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

а) $y = x^2 - 1$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$; б) $y = x^2$, $y = 2x$.

Решение. а) Построим графики указанных в условии функций (рис.2, а). Искомую площадь можно найти как сумму площадей фигур OAD и ABC:

$$S = S_{OAD} + S_{ABC}.$$

Так как фигура OAD расположена ниже оси Ox, значение интеграла

$$\int_0^1 (x^2 - 1)dx$$

будет отрицательным и площадь фигуры OAD определится как модуль этого интеграла. Тогда

$$S = S_{OAD} + S_{ABC} = \left|\int_0^1 (x^2-1)dx\right| + \int_1^2 (x^2-1)dx = \left|\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_0^1\right| + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_1^2 =$$
$$= \left|\left(\frac{1}{3} - 1\right) - 0\right| + \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \left|-\frac{2}{3}\right| + \frac{4}{3} = 2;$$

б) Графики функций, приведенных в условии, показаны на рис.2,*б*. Как следует из рисунка, площадь заштрихованной фигуры

$$S = \int_0^2 2x dx - \int_0^2 x^2 dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

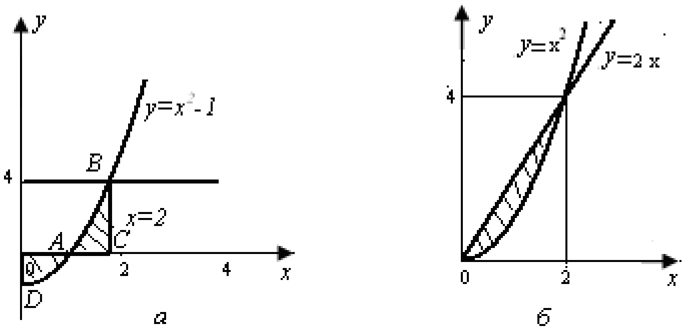


Рис. 2

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Вычислить неопределенные интегралы и результаты проверить дифференцированием.

а) $\int\left(2x-\frac{5}{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$;

б) $\int\frac{x^2dx}{3x^3+4}$;

в) $\int x\sin 2xdx$.

2. Вычислить определенные интегралы.

а) $\int_2^4\left(x^3-\frac{1}{x}\right)dx$;

б) $\int_0^5\frac{xdx}{x^2+5}$;

в) $\int_1^4 x\cdot e^x dx$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+6x+8$, $y=x+4$. Сделать чертеж.

Ответы

1. а) $x^2-5\ln x+\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C$; б) $\frac{1}{9}\ln\left|3x^3+4\right|+C$; в) $-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **2.** а) $60-\ln 2$; б) $\ln\sqrt{6}$; в) $3e^4$. **3.** 4,5 кв.ед.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Вопросы для самоподготовки

1. Общий вид дифференциального уравнения.
2. Общее и частное решения дифференциального уравнения.
3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
5. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Решением *дифференциального уравнения* называют любую функцию $y = y(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество. Функция $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ называется *общим решением дифференциального уравнения*, если она обращает дифференциальное уравнение в тождество при любых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$. Для заданных начальных условий

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

можно найти значения постоянных $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$, при которых функция $y = y(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ будет удовлетворять этим начальным условиям. Такую функцию называют *частным решением дифференциального уравнения*.

Порядком дифференциального уравнения называют наибольший порядок производной, входящей в это уравнение. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка. В общем случае оно имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если дифференциальное уравнение можно представить в виде

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy,$$

то его называют *уравнением с разделяющимися переменными*. Для решения такого уравнения достаточно проинтегрировать его левую и правую части.

Для рассмотрения однородных дифференциальных уравнений введем понятие однородной функции. Функция $R(x, y)$ называется *однородной функцией k – го порядка*, если для нее при любом значении *t* выполняется тождество

$$R(tx, ty) = t^k R(x, y).$$

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется *однородным*, если $f(x, y)$ является однородной функцией нулевой степени. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка можно представить в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Это уравнение приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными заменой $y(x) = t(x)x$.

Уравнение вида

$y' + P(x)y = Q(x)$

называют *линейным дифференциальное уравнение первого порядка*. Его решение ищут в виде $y(x) = u(x)v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – неизвестные функции. После подстановки в уравнение y и $y' = u'v + v'u$ получаем соотношение

$$v\frac{du}{dx} + \left(\frac{dv}{dx} + p(x)v\right)u = Q(x).$$

В качестве $v(x)$ следует выбрать одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0.$$

Тогда $u(x)$ определится из уравнения

$$v\frac{du}{dx} = Q(x).$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Решить уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение. Переменные здесь разделены. Интегрируя, получим:

$$\int xdx + \int ydy = C;\quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C;\quad x^2 + y^2 = 2C.$$

Так как C произвольно, то можно положить $2C=C^2$, принимая во внимание, что левая часть последнего равенства положительна. Тогда уравнение примет вид $x^2 + y^2 = C^2$.

С геометрической точки зрения получено семейство (совокупность) концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом, равным C.

2. Решить уравнение $\dfrac{dy}{y+1} = \dfrac{dx}{x-1}$.

Решение. Переменные разделены. Интегрируя, получим:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x-1};\quad \ln(y+1) = \ln(x-1) + C.$$

Произвольную постоянную C можно обозначить через $\ln C$, тогда

$\ln(y+1) = \ln(x-1) + \ln C$, или $\ln(y+1) = \ln C(x-1)$;

потенцируя, получим:

$y + 1 = C(x-1)$. Это и есть общий интеграл данного дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения получено уравнение пучка прямых, центром которого служит точка $M(1;-1)$, с угловым коэффициентом C.

3. Решить уравнение $y' = (2y+1)ctgx$.

Решение. Напоминаем, что производная равна $y' = \frac{dy}{dx}$, значит $\frac{dy}{dx} = (2y+1)ctgx$.

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dy}{2y+1} = ctgxdx.$$

Теперь интегрируем:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \int ctgxdx;$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2dy}{2y+1} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx;$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2dy}{2y+1} = \int \frac{dx \sin x}{\sin x};$$

$\frac{1}{2}\ln(2y+1) = \ln\sin x + \ln C$ (здесь $\ln C$ вместо C).

Потенцируем:

$$\sqrt{2y+1} = C\sin x;$$

$$2y+1 = C^2\sin^2 x;$$

положим $C^2 = C$, тогда

$2y = C\sin^2 x - 1$, откуда

$$y = \frac{C\sin^2 x - 1}{2}.$$

Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

4. Найти частный интеграл уравнения $2y'\sqrt{x} = y$, если $y = 1$ при $x = 4$.

Решение. Перепишем уравнение так:

$2\frac{dy}{dx}\cdot\sqrt{x} = y$, или $2\sqrt{x}dy = ydx$.

Разделяем переменные, поделив обе части уравнения на произведение $y\sqrt{x}$:

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Теперь проинтегрируем:

$$2\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$2\ln y = 2\sqrt{x} + C;$$

$$\ln y = \sqrt{x} + \frac{C}{2}.$$

Приняв $\frac{C}{2} = C$, получим

$$\ln y = \sqrt{x} + C.$$

Полагая в этом уравнении, согласно условию, $x = 4$, $y = 1$, будем иметь:

$\ln 1 = \sqrt{4} + C$; $0 = 2 + C$, откуда $C = -2$.

Обращаясь к уравнению $\ln y = \sqrt{x} + C$, получим частный интеграл: $\ln y = \sqrt{x} - 2$, отсюда окончательно получим: $y = e^{\sqrt{x}-2}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти общие и частные решения дифференциального уравнения.

а) $xdy = ydx$, $y(4) = 3$,

б) $y' = \frac{1}{x}$, $y(1) = 1$,

в) $y' + x^2 = 0$, $y(2) = 3$,

г) $\frac{1}{x} y' = \frac{1}{\sin y}$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения.

а) $y' = 1 + \frac{y}{x}$,

б) $y' + y = e^x$.

Ответы

1. а) $y = Cx$; $\tilde{y} = \frac{3}{4}x$; б) $y = \ln|x| + C$; $\tilde{y} = \ln|x| + 1$; в) $y = -\frac{x^3}{3} + C$; $\tilde{y} = -\frac{x^3}{3} + \frac{17}{3}$; г) $\cos y = C - \frac{x^2}{2}$; $\cos y = \frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{x^2}{2}$. **2**. а) $y = x(\ln x + C)$; б) $y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

Вопросы для самоподготовки

1. Общий вид дифференциального уравнения второго порядка.
2. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p и q – действительные числа. Для нахождения решений этого уравнения вначале ищут корни *характеристического уравнения*

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Пусть k_1 и k_2 – корни характеристического уравнения. Тогда возможны четыре случая:

1) если корни *действительные и различные* ($k_1 \neq k_2$), то общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) если корни *действительные и равные* $k_1 = k_2$, то $y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x}$;

3) если корни *комплексные* $k = a \pm bi$, то $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$;

4) если корни *мнимые* $k = \pm bi$, то $y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $2y'' - 5y' + 2y = 0$; б) $y'' - 8y' + 16y = 0$; в) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

Решение. а) Запишем характеристическое уравнение и решим его:

$$2k^2 - 5k + 2 = 0,$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9,$$

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{k}_2 = 2.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{2x}$$

б) Запишем характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 8k + 16 = 0,$$

$$D = 64 - 4 \cdot 16 = 0,$$

$$k_1 = \mathrm{k}_2 = 4.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{4x}$$

в) Запишем характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2+8k+25=0,$$
$$D=64-4\cdot 25=-36,$$
$$k_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-8\pm 6i}{2}=-4\pm 3i.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y=e^{-4x}(C_1\cos 3x-C_2\sin 3x).$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1 Найти общее решение уравнения.

1) $y''+3y'-4y=0$.

2) $y''-9y'+14y=0$.

3) $y''-y=0$.

4) $y''+2y'=0$.

5) $y''-14y'+49y=0$.

6) $y''-6y'+45y=0$.

2 Найти частное решение уравнения.

1) $y''-9y=0$, если $y=2$ и $y'=6$ при $x=0$.

2) $y''-y'-2y=0$, если $y=3$ и $y'=0$ при $x=0$.

3) $y''+2y'+5y=0$, если $y=1$ и $y'=1$ при $x=0$.

4) $y''-10y'+25y=0$, если $y=2$ и $y'=8$ при $x=0$.

5) $y''+3y'+2y=0$, если $y=-1$ и $y'=3$ при $x=0$.

6) $y''+6y'+9y=0$, если $y=2$ и $y'=1$ при $x=0$.

7) $y''-2y'+2y=0$, если $y=1$ и $y'=3$ при $x=0$.

Ответы

1. 1) $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$; 2) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{7x}$; 3) $y=C_1e^{-x}+C_2e^x$; 4) $y=C_1+C_2e^{-2x}$; 5) $y=(C_1+C_2x)e^{7x}$; 6) $y=(C_1\cos 6x+C_2\sin 6x)e^{3x}$. **2.** 1) $\widetilde{y}=2e^{3x}$; 2) $\widetilde{y}=e^{-x}+2e^{2x}$; 3) $\widetilde{y}=(\cos 2x+\sin 2x)e^{-x}$; 4) $\widetilde{y}=(2-2x)e^{5x}$; 5) $\widetilde{y}=e^{-x}-2e^{-2x}$; 6) $\widetilde{y}=(2+7x)e^{-3x}$; 7) $\widetilde{y}=(\cos x+2\sin x)e^x$.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Вопросы для самоподготовки

1. Числовые ряды
2. Основные свойства рядов
3. Признаки сходимости рядов

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ..., \quad (1)$$

в котором a_1, a_2, a_3, …, a_n… (члены ряда) – определенные числа, для которых известен закон, позволяющий определить каждый член a_n по заданному номеру n.

Сумма n первых членов ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

называется n-й *частичной суммой*.

Числовой ряд (1) называется *сходящимся*, если сумма n первых его членов $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ при $n \to \infty$ имеет предел. Если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Ряд может быть сходящимся лишь при условии, когда его общий член a_n стремится к нулю, при неограниченном увеличении его номера n, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. (Это необходимый, но недостаточный признак сходимости ряда.) Надо помнить, что если общий член ряда не стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится. (Это достаточный признак расходимости для всякого ряда.)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

Ряд

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n + ..., \quad (2)$$

в котором каждый член образуется из предыдущего умножением на одно и то же число, называется *геометрическим*.

Геометрический ряд сходится, если $|q| < 1$, и его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$; если $|q| \geq 1$, то геометрический ряд расходится.

Ряд (2) представляет собой геометрическую прогрессию.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД

Ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$$

(3)

называется *гармоническим*.

Гармонический ряд расходится несмотря на то, что $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Обобщенный гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+...+\frac{1}{n^k}+...$$

(4)

сходится, если $k>1$, и расходится, если $k\le 1$.

Основные свойства рядов

1. Если все члены данного ряда

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n+...,$$

(1)

умножить на одно и то же число k ($k\neq 0$, то ряд

$$ka_1+ka_2+ka_3+...+ka_n+...$$

будет сходиться, если ряд (1) сходится, и будет расходиться, если ряд (1) расходиться.

2. Если сходятся ряды:

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$$

и

$$v_1+v_2+v_3+...+v_n+...,$$

то будет сходиться и ряд, полученный от почленного сложения или вычитания соответствующих членов этих рядов:

$$(u_1\pm v_1)+(u_2\pm v_2)+(u_3\pm v_3)+...+(u_n\pm v_n)+...$$

3. Если в ряде (1) приписать к началу или отбросить от его начала конечное число членов, то полученный ряд будет сходиться, если ряд (1) сходится, и расходиться, если ряд (1) расходится.

СРАВНЕНИЕ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ (ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДОВ)

Пусть

$$u_1+u_2+u_3+...+u_n+...$$

(5)

и

$$v_1+v_2+v_3+...+v_n+...$$

(6)

- два ряда с положительными членами. Если ряд (6) сходится, а члены ряда (5), начиная с некоторого, меньше соответствующих членов ряда (6), т.е. $u_n\le v_n$ ($n<n_0$), то ряд (5) также сходится.

Если ряд (6) расходится, а члены ряда (5), начиная с некоторого, больше соответствующих членов ряда (6), то и ряд (5) расходится.

ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА
(ВТОРОЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДОВ)

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=k$, то при $k<1$ ряд сходится, а при $k>1$ расходится.

При $k=1$ требуется дополнительное исследование.

ПРИЗНАК КОШИ
(ТРЕТИЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДОВ)

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ положительны и $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$, то при $k<1$ ряд сходится, а при $k>1$ расходится.

При $k=1$ требуется дополнительное исследование.

АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

(8)

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

(9)

Ряд (8) называется *условно сходящимся*, если он сходится, а ряд (9) расходится.

Если ряд сходится условно, то от перемены мест его членов сумма может изменяться и больше того, имеет место теорема (Римана).

Сумма ряда, который сходится условно, зависит от того порядка, в котором расположены его члены. Изменяя этот порядок, можно заставить ряд иметь своей суммой любое число и даже расходиться.

Ряд называется *знакочередующимся*, если любые соседние члены имеют противоположные знаки.

ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА
(ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩЕГОСЯ РЯДА)

Знакочередующийся ряд сходится, если члены его убывают по абсолютной величине и его общий член стремится к нулю при $n\to\infty$, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{8}+\ldots$$

Решение. Находим предел общего члена a_n данного ряда при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2}{3}.$$

Необходимый признак сходимости, определяемый равенством $a_n\to 0$ ($n\to\infty$), не выполняется, поэтому этот ряд расходится.

2. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}$.

Решение. Зная n-й член ряда, находим следующий за ним ($n+1$)-й член, заменяя в выражении общего члена n на $n+1$. Затем находим предел отношения последующего члена a_{n+1} к предыдущему a_n при $n\to\infty$:

$$a_n=\frac{n^5}{2^n},\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}:\frac{n^5}{2^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\qquad\left(k=\frac{1}{2}\right).$$

Так как $k<1$, то, согласно признаку Даламбера, данный ряд сходится.

3. Исследовать сходимость ряда $1+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots$

Решение. Имеем:

$$a_n=n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1},\qquad a_{n+1}=(n+1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n;$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

Так как предел меньше единицы, то данный ряд сходится.

4. Исследовать по признаку сравнения сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\ldots$

Решение. Сравним данный ряд с геометрическим. Каждый член $a_n=\frac{1}{n^n}$ данного ряда, начиная с третьего, меньше соответствующего члена $b_n=\frac{1}{2^n}$ бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\ldots,$$

которая представляет собой сходящийся ряд (ее знаменатель $q=\frac{1}{2}<1$). Значит, согласно признаку сравнения, исследуемый ряд также сходится.

5. Исследовать сходимость ряда $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+..$ по признаку Коши.

Решение. Общий член ряда $a_n=\frac{1}{n^n}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, т.е. $k=0<1$, поэтому данный ряд сходится.

6. Исследовать на абсолютную сходимость ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

Решение. Члены ряда убывают по абсолютной величине, а общий член ряда $a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,

значит, на основании признака Лейбница, ряд сходится.

Чтобы выяснить, сходится ли он абсолютно, надо составить ряд из абсолютных величин его членов:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

Это гармонический ряд, о котором известно, что он расходится, значит ряд сходится условно.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Установить расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+4}$ с помощью следствия из необходимого признака.

2. Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n}$.

3. Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость ряд

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+\ldots\ .$$

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$;

б) $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\ldots$.

Ответы

2. а) сходится; б) расходится. **3**. сходится.
3. **4**. а) абсолютно сходится; б) абсолютно сходится.

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯД МАКЛОРЕНА

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой точке x_0 и имеет производные всех порядков в этой точке, то степенной ряд вида

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots =$$

$= f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ - называется **рядом Тейлора** для функции $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0 = 0$, то получается ряд:

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$, который называется **рядом Маклорена**.

Имеют место следующие разложения элементарных функций в степенные ряды:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty), \qquad (1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty), \qquad (2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad (-\infty < x < +\infty), \qquad (3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad (-1 < x \le 1), \qquad (4)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots \qquad (-1 < x < 1), \qquad (5)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad (-1 < x < 1). \qquad (6)$$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Разложить в ряд Маклорена функцию: а) $f(x) = \ln(1-2x)$, б) $f(x) = x\sin x$.

Решение. а) Заменяя в разложении (4) x на $-2x$, получим

$$\ln(1-2x) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3} - \ldots$$

или

$$\ln(1-2x) = -2x - \frac{2^2}{2}x^2 - \frac{2^3}{3}x^3 - \ldots$$

Разложение (4) справедливо в промежутке $-1 < x \le 1$, а искомое разложение получается в результате замены x на $-2x$. Следовательно, для нахождения промежутка сходимости полученного ряда нужно решить неравенство $-1 < -2x \le 1$, откуда $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$.

б) Находим значения функции и ее производных в точке x_0=0:

$f(0)=0,$

$f'(x)=\sin x+x\cos x,\qquad f'(0)=0,$

$f''(x)=2\cos x-x\sin x,\qquad f''(0)=2,$

$f'''(x)=-3\sin x-x\cos x,\qquad f'''(0)=0,$

$f^{(4)}(x)=-4\cos x+x\sin x,\qquad f^{(4)}(0)=-4,$

$f^{(5)}(x)=5\sin x+x\cos x,\qquad f^{(5)}(0)=0,$

$f^{(6)}(x)=6\cos x-x\sin x,\qquad f^{(6)}(0)=6,$

$f^{(7)}(x)=-7\sin x-x\cos x,\qquad f^{(7)}(0)=0,$

$f^{(8)}(x)=-8\cos x+x\sin x,\qquad f^{(8)}(0)=-8.$

Подставляя найденные значения в ряд Маклорена, получим

$$\frac{2}{2!}x^2-\frac{4}{4!}x^4+\frac{6}{6!}x^6-\frac{8}{8!}x^8+\ldots,$$

или

$$\frac{x^2}{x!}-\frac{x^4}{3!}+\frac{x^6}{5!}-\frac{x^8}{7!}+\ldots.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию:

1) $\sqrt{1+x}$

2) $(1+x)^5$

3) $\cos^2 x$

4) $e^{\sin x}$

2. Написать три первых члена ряда Маклорена для функции $f(x)=\ln(e^x+x)$.

Ответы

1. а) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4\cdot 2!}+\frac{3x^3}{8\cdot 3!}-\frac{15x^4}{16\cdot 4!}+\frac{105x^5}{32\cdot 5!}-\ldots$; б) $1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$;

в) $1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{8}{4!}x^4-\frac{32}{6!}x^6+\frac{128}{8!}x^8-\ldots$; г) $\cos x\cdot e^{\sin x}(-1-\sin x-2\sin x+\cos x\sin x+\ldots)$.

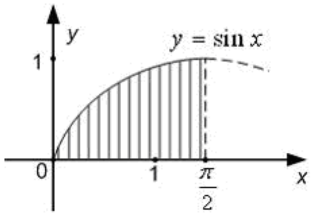
Тест по теме Теория пределов

1	$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{4-\sqrt[3]{x}}{7-x}=\ldots$			
	А) 4	Б) 2	В) -2	Г) -4
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x}\right)^{x}=\ldots$			
	А) ∞	Б) $e^{\frac{1}{4}}$	В) 1	Г) e^{4}
3	Общий член последовательности выражается формулой $a_n=\dfrac{n^3}{2^n}$. Тогда $a_4=\ldots$			
	А) $\dfrac{3}{2}$	Б) 6	В) 4	Г) $\dfrac{1}{2}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{25x+9}{x^2-2x}=\ldots$			
	А) ∞	Б) 25	В) 1	Г) 0
5	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x^2-25}$ равен …			
	А) $\dfrac{1}{10}$	Б) 0	В) ∞	Г) 10
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}=\ldots$			
	А) 1	Б) 3	В) $\dfrac{1}{3}$	Г) $\dfrac{1}{3}e$
7	Точка $x=1$ для функции $y=\begin{cases}-x-1 & \text{при } x\le 1\\ \sqrt{x} & \text{при } x>1\end{cases}$ является …			
	А) Точкой устранимого разрыва		В) Точкой разрыва I рода	
	Б) Точкой разрыва II рода		Г) Точкой непрерывности	

Тест по теме Дифференциальное исчисление

1	Производная функции $y=\left(x^2+x\right)\cdot\ln x$ равна… А) $\dfrac{2x+1}{x}$ Б) $(2x+1)\cdot\ln x+x+1$ В) $(2x+1)\cdot\ln x$ Г) $2x+\dfrac{1}{x}$
2	Производная функции $y=e^{x^2+x}$ равна… А) $\left(x^2+x\right)\cdot e^{x^2+x-1}$ Б) $2x+1+e^{x^2+x}$ В) e^{x^2+x} Г) $(2x+1)\cdot e^{x^2+x}$
3	Если $f(x)=\dfrac{8}{x}-6x+11$, то $f'(-2)$ принимает значение, равное… А) -4 Б) 3 В) 7 Г) -8
4	Для функции $y=-2x^3+3x^2+120x-10$ точка максимума x_0 принимает значение, равное… А) -4 Б) 0 В) 4 Г) 5
5	Наибольшее значение функции $f(x)=x^3-9x^2-21x+16$ на отрезке $[-2;0]$ равно… А) 27 Б) 16 В) 7 Г) 14
6	Установите, чему равны значения функции $z=\dfrac{4x^2y}{x+2y^2}$ в указанных точках. 1) $z(-1;1)$ 2) $z(2;2)$ 3) $z(0;1)$ А) 3,2 Б) 4 В) 0 Г) -4
7	Если $f(x)=x-5\cos x$, то $f'(0)$ принимает значение, равное… Ответ:________

Тест по теме Интегральное исчисление

1	Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{8 \cdot \sqrt{x}}$ равен … А) $16 \cdot \sqrt{x} + C$ Б) $4 \cdot \sqrt{x} + C$ В) $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{x} + C$ Г) $\frac{1}{8} \cdot \sqrt{x} + C$
2	Неопределенный интеграл $\int sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)dx$ равен … А) $-3 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + C$ В) $-\frac{1}{3} \cdot cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + C$ Б) $3 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + C$ Г) $\frac{1}{3} \cdot cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) + C$
3	$\int_{-2}^{1} 4x^3 dx = ...$ А) – 60 Б) – 15 В) 15 Г) 17
5	Площадь фигуры, изображенной на заданном рисунке, равна …  А) 1,5 Б) 1 В) 2 Г) 3
6	$\int_{4}^{25} \frac{3}{\sqrt{x}} dx = ...$ А) 30 Б) 12 В) 18 Г) 42
7	Установите соответствие между интегралами и методами их вычисления. 1. непосредственное интегрирование 2. метод замены переменной 3. метод интегрирования по частям А) $\int x^3 e^x dx$ Б) $\int \frac{dx}{x^5}$ В) $\int \cos x \sqrt{\sin x + 5} dx$

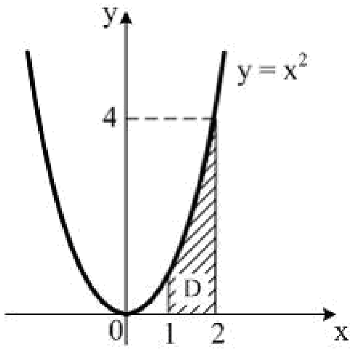
Тест по теме Дифференциальные уравнения

1	Разделение переменных в дифференциальном уравнении $\ln x \cdot \sin y dx + x \cdot \cos y dy = 0$ приведет его к виду … А) $\frac{\ln x dx}{x} = ctgydy$ В) $\frac{\ln xtgydx}{x} = -dy$ Б) $\frac{\ln x dx}{x} = -tgydy$ Г) $\frac{\ln x dx}{x} = -ctgydy$
2	Решением (общим интегралом) дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $2ydy - \cos xdx = 0$ является …. А) $y^2 - \sin x = C$ В) $2y^2 - \sin x = C$ Б) $y^2 + \sin x = C$ Г) $2y - \cos x = C$
3	Общим решением однородного дифференциального уравнения $y' = \frac{3y^3 - x^3}{3xy^2}$ является … А) $\frac{y^3}{x^3} = -\ln\lvert x\rvert + C$ В) $\frac{y^3}{x^3} = \ln\lvert x\rvert + C$ Б) $\frac{x^3}{y^3} = -\ln\lvert x\rvert + C$ Г) $\frac{3y^3}{x^3} = \ln\lvert x\rvert + C$
4	Общим решением дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$ является … А) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ В) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ Б) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ Г) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$
5	Общим решением дифференциального уравнения $y''' = 0$ является … А) $y = x^2$ В) $y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x$ Б) $y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ Г) $y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3$
6	Частными решениями дифференциального уравнения $y'' - y = 2x$ являются … Укажите не менее двух верных ответов. А) $y = x$ Б) $y = e^x - 2x$ В) $y = -2x$ Г) $y = e^{-x}$
7	Установите соответствие между начальными условиями и решениями уравнения $y' - 5x = 0$, полученными при данных начальных условиях. 1) $y(0) = 0$ 2) $y(0) = 4$ 3) $y(2) = 3$ А) $y = \frac{5x^2}{2} - 7$ Б) $y = \frac{5x^2}{2}$ В) $y = \frac{5x^2}{2} + 4$ Г) $y = \frac{5x^2}{2} - 4$

Тест по теме Ряды

1	Установите соответствие между рядами и их названиями. 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{7+n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\cdot 9^n$ 3. .$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{\sqrt[3]{n+4}}$ А) знакочередующийся Б) знакоположительный В) степенной
2	Третий член числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{(n+1)!}$ равен … А) $-\frac{1}{8}$ Б) $\frac{1}{8}$ В) $-\frac{1}{9}$ Г) $-\frac{3}{8}$
3	Дан числовой ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2$. Его частичная сумма S_3 равна … А) 3 Б) 6 В) 11 Г) 14
4	Радиус сходимости R степенного ряда $1+0{,}1\cdot x+0{,}1^2\cdot x^2+0{,}1^3\cdot x^3+\ldots+0{,}1^n\cdot x^n+\ldots$ равен … А) 10 Б) 0,01 В) 0,1 Г) 1
5	Необходимое условие сходимости $\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\right)$ выполняется для двух рядов … А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ Б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}$ В) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$ Г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$
6	Третий член ряда Маклорена $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$ для функции $y=e^{6x}$ равен … А) $36x^3$ Б) $-18x^2$ В) $18x^2$ Г) $\frac{x^2}{2}$
7	Известно, что ряд Маклорена для функции $y=\ln(1-x)$ имеет вид $\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots-\frac{x^n}{n}+\ldots$. Тогда $\ln\left(1-\frac{x}{10}\right)=\ldots$ А) $-10x-\frac{100\cdot x^2}{2}-\frac{1000\cdot x^3}{3}-\frac{10000\cdot x^4}{4}-\ldots-\frac{10^n\cdot x^n}{n}+\ldots$ Б) $-\frac{1}{10}-\frac{1}{2\cdot 10^2}-\frac{1}{3\cdot 10^3}-\frac{1}{4\cdot 10^4}-\ldots-\frac{1}{n\cdot 10^n}+\ldots$ В) $-\frac{x}{10}-\frac{x^2}{2\cdot 10^2}-\frac{x^3}{3\cdot 10^3}-\frac{x^4}{4\cdot 10^4}-\ldots-\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\ldots$ Г) $-\frac{1}{10}\cdot\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\right)$

Тест к разделу «Основы математического анализа»

1.	Производная функции $y = e^x \cdot \sin x$ имеет вид … А) $y' = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x$ В) $y' = e^x \cdot \cos x$ Б) $y' = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x$ Г) $y' = e^x + \cos x$
2.	Производная функции $y = ctg 10x$ имеет вид … А) $y' = -10 tg 10x$ В) $y' = -\dfrac{10}{\sin^2 10x}$ Б) $y' = \dfrac{10}{\cos^2 10x}$ Г) $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 10x}$
3.	Вторая производная $y''(x)$ функции $y(x) = x^2 - 3x - 1$ имеет вид … А) $y'' = 3$ Б) $y'' = 0$ В) $y'' = 1$ Г) $y'' = 2$
4.	Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 3x^2 - x + 5$ в точке $x_0 = 0$ равен … А) - 1 Б) 1 В) 5 Г) 4
5.	Множество всех первообразных функции $y = \dfrac{2}{x^2}$ имеет вид … А) $-\dfrac{4}{x^3}$ Б) $-\dfrac{2}{x}$ В) $-\dfrac{2}{x} + C$ Г) $-\dfrac{4}{x^3} + C$
6.	Площадь криволинейной трапеции *D* определяется интегралом …  А) $\int_1^2 2x dx$ В) $\int_1^2 x^2 dx$ Б) $\int_1^4 2x dx$ Г) $\int_1^4 x^2 dx$
7.	Определенный интеграл $\int_1^2 4x^3 dx$ равен ... А) 15 Б) 17 В) 36 Г) x^4
8.	В результате подстановки $t = 5x - 1$ интеграл $\int \dfrac{dx}{\sqrt{5x-1}}$ приводится к виду … А) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{t}}$ Б) $\int \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$ В) $5\int \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$ Г) $\dfrac{1}{5}\int \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$
9.	Дифференциальное уравнение $\ln y dx - \sin x dy = 0$ в результате разделения переменных сводится к уравнению … А) $\dfrac{\ln y dx}{\sin x} = dy$ В) $\dfrac{dx}{\sin x} = \dfrac{dy}{\ln x}$

	Б) $\ln y dx = \sin x dy$ Г) $\frac{dx}{\sin x} = -\frac{dy}{\ln x}$
10.	Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$ имеет вид … А) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$ В) $y = e^{3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$ Б) $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$ Г) $y = e^{-3x}(C_1 \cos(-3x) + C_2 \sin(-3x))$
11.	Общее решение дифференциального уравнения $y'' = -\sin x$ имеет вид … А) $y = \sin x + C_1$ В) $y = \sin x + C_1 x + C_2$ Б) $y = \sin x + C_1 + C_2$ Г) $y = \cos x + C_1$
12.	Решением дифференциального уравнения $y' - 16y = 0$ является функция … А) $y = -8x^2$ Б) $y = 16$ В) $y = 8x^2$ Г) $y = 16x$
13.	Предел $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2}$ равен ...
14.	Значение предела $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + 3x^2 - 2x}{4 - 2x + x^2}$ равно … А) ∞ Б) 3 В) 0 Г) $\frac{1}{4}$
15.	Значение предела $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(5-x)}{x^2 - 4}$ равно … А) 0 Б) $\frac{3}{4}$ В) $-\frac{3}{4}$ Г) ∞
16.	Значение предела $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x}$ равно … А) 0 Б) 1 В) 5 Г) $\frac{1}{5}$

ЛИТЕРАТУРА

1. Богомолов Н.В. Математика: учеб. для ссузов. – М.: Дрофа, 2006.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для сузов. – М.: Дрофа, 2007.
3. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учеб. пособие для ссузов. – М.: Дрофа, 2007.
4. Омельченко В.П. Математика: учебное пособие – Ростов н./Д.: Феникс, 2007.
5. Подольский В.А., Суходский А.М. Сборник задач по математике для техников-програмистов: Учебное пособие для техникумов. – М.: Высшая школа, 2005
6. Сочнев С.В. Элементы высшей математики: Сб. заданий для практических занятий: Учебное пособие. – Мн.: Выш. шк., 2003.